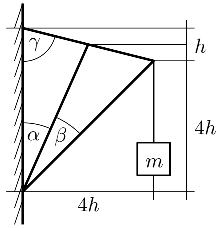
Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky

10 bodů; průměr 4,74; řešilo 47 studentů

1. *Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na* `https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf`.
2. *Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poloměr $r = 0{,}8\,\mathrm{mm}$. Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna $a = 2{,}46\cdot 10^{-10}$ m a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny $c = 6{,}71 \cdot 10^{-10}$ m. Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?*



Obr. 1: Soustava.

3. *Na obrázku 1 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením g. Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti m (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tyč mezi úhly α a β půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.*
4. *Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závity a je konstantní. Popište pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.*
5. *Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poloměr R a konstantní vzdálenost mezi závity h. Popište pohyb po šroubovici ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitu této šroubovice.*

Bonus *Vymyslete nebo najděte (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uveďte jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.*

Karel generoval problémy.

Výpočet pokrytí papíru

Nejprve si stránku prohlédněme. Jde o stránku, která je pokrytá většinou textem plus se na ní nachází obrázek. Ten by mohl na první pohled mít přibližně stejné pokrytí barvou jako text. Obvykle se počet stran, které zvládnete vytisknout pomocí toneru, udává v násobcích stran s 5 % pokrytím.[1] Stránka je pokrytá textem celá, takže bychom mohli „tipnout“, že by mělo jít velice zhruba o 10 % pokrytí. Ale to je opravdu jenom velice rychlý odhad. Podívejme se na jednu variantu korektnějšího řešení.

Použijeme APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0.[2] Tento program podporuje nejen zpracování souborů TIFF, JPG či BMP, ale pokud si nainstalujete i Ghostscript,[3] pak lze pracovat přímo se soubory formátu PDF (či PS).

[1] Komentář k tomu, co je 5 % pokrytí, najdeme třeba na `https://www.naplne.cz/co-je-5-pokryti`.
[2] `https://avpsoft.com/products/apfill/`
[3] `https://www.ghostscript.com/`

Využijeme funkci „CMYK Coverage ratio (PDF, PS)“. Jelikož pokrytí pro tisk záleží i na rozlišení, podíváme se na všechna dostupná rozlišení: 50 dpi, 75 dpi, 150 dpi, 300 dpi a 600 dpi. Jednotka dpi značí „dot per inch“, tedy bodů (pixelů) na palec. Rozdílná pokrytí u různých rozlišení jsou dána tím, že se z vektorových fontů musí přepočítat nějakým způsobem body, které pak tiskárna na papír vytiskne. Pro pokrytí v rámci počítačové obrazovky platí, že čím vyšší rozlišení, tím vyšší přesnost. Stránka ovšem není jenom v odstínech černé - obrázek je totiž tvořený z barev CMY, tedy azurové (Cyan), fuchsiové (Magenta) a žluté (Yellow), přestože by správně měl být v odstínech černé (blacK). V tabulce 1 jsou uvedené výsledky. Od 300 dpi se zdá, že jsou již stabilní, a proto jako rozhodující můžeme vzít tato data. Jako relativně rozumný odhad pak můžeme vzít průměr z hodnot C, M a Y a ten přičíst k hodnotě K. Dostáváme pak pokrytí 5,41 %. Chybu výsledku z programu alespoň odhadneme na 0,1 % a dostáváme tak výsledný odhad, že $(5{,}4 \pm 0{,}1)\,\%$ stránky je pokryto odstíny černé, resp. $(5{,}3 \pm 0{,}1)\,\%$ je pokryto explicitně černou barvou.

Tab. 1: Výsledky pokrytí první strany řešení úlohy 26-IV-5 získané pomocí programu APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0. Počet platných cifer odpovídá výstupu z programu.

Rozlišení/dpi	C	M	Y	K
50	0,35 %	0,31 %	0,32 %	10,57 %
75	0,25 %	0,22 %	0,23 %	7,90 %
150	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,80 %
300	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %
600	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %

Zajímavou možností je udělat průměr z různých na sobě nezávisejících odhadů. Podívejme se tedy na odhady řešitelů úlohy, kteří zaslali tuto část. Jedná se o hodnoty od 3,1 % po 28 %.[4] Střední hodnota vychází 11 % a pokud bereme samotné hodnoty jako přesné,[5] pak je výběrová směrodatná odchylka 7 %. Řešitelé používali různé programy – GIMP, ImageJ, Python a další, které dokážou vytvořit histogramy. Je zajímavé, že např. ImageJ dával výrazně odlišné výsledky – 5,23 % a 18,96 %, což je pravděpodobně způsobeno nastavením rozlišení a interpretací výsledků.

Bodování úlohy bylo poměrně tolerantní. Nicméně odpověď 23,758 7 % je evidentně nesprávná, výsledek na takový počet platných cifer by musel být doložen nějakým opravdu hodně přesným postupem. S ohledem na to, že reálná hodnota je nejspíše opravdu výrazně nižší, je to zjevně neopodstatněně zapsaná přesnost.

Spotřebovaná tuha

Rozměr a krystalové mřížky nemusíme vůbec použít, čehož si všimla i velká část řešitelů. Je pouhou zajímavostí, že na jeden atom připadá průměrně plocha $S_\mathrm{C} = \sqrt{3}a^2/2 \doteq 5{,}24\cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}^2$.

Slovo čtvrtka v zadání znamená papír s vyšší gramáží. Plochu listu A4 můžeme určit z jeho rozměrů. Šířka A4 je $x = 210\,\mathrm{mm}$ a výška je $y = 297\,\mathrm{mm}$. Plocha je pak $S_\mathrm{A4} = xy \doteq 0{,}0624\,\mathrm{m}^2$.

[4] Pokud si z dvou odhadů jednoho řešitele vybereme pouze 3,1 % a druhou variantu, totiž 62 %, zahodíme. Stránka pokrytá z více než poloviny barvou by musela být plná obrázků a ne textu.

[5] Většina řešitelů neuvedla explicitně neurčitost odhadu, což bychom správně měli brát za chybu.

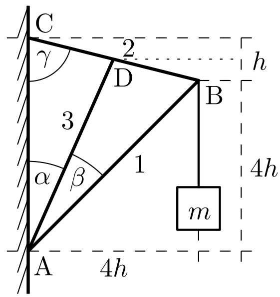
Mimochodem, papír serie A je standardizován tak, že A0 má plochu $1{,}00\,\mathrm{m}^2$ a každý další má poloviční plochu předcházejícího.

V zadání je uveden poloměr tuhy, pravděpodobně se jedná o válcovou tuhu. Průřez určíme jako $S_\mathrm{t} = \pi r^2 \doteq 2{,}01\,\mathrm{mm}^2$. Pro jednoduchost lze předpokládat, že se stírají vrstvy po vrstvě. Pak potřebná délka tuhy h je dána následujícím poměrem

$$h = 100\frac{S_\mathrm{A4}}{S_\mathrm{t}}c = \frac{xyc}{\pi r^2} \doteq 2{,}1\,\mathrm{mm}\,.$$

Pokud chceme pomalovat celou čtvrtku A4 pomocí grafitové tuhy o poloměru $0{,}8\,\mathrm{mm}$ při předpokladu, že průměrně se bude oddělovat 100 vrstev tuhy, budeme potřebovat pouhé $2{,}1\,\mathrm{mm}$ tuhy.

Tyčová soustava



Obr. 2: Náčrt zadání tyčové soustavy s doplněným označením tyčí a spojů.

Na obrázku 2 jsme si označili body a tyče. Ze zadání víme, že tyče mohou působit silou ve stejném směru, jak jsou upevněné, a ne kolmo. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že i na tyče může být působeno pouze v jejich směru. Tím pádem se tyč označená jako 4 v soustavě vůbec neprojeví a můžeme ji odebrat. Pokud by se jednalo o reálnou konstrukci, kde jsou tyče hmotné a mají i šířku a navíc se po zavěšení předmětu některé protáhnou a jiné zkrátí, tak by se uplatnila i tyč 4.

Soustava se nám zjednodušila na dvě tyče a jedno závaží. Celkový součet sil působících na bod B musí být nulový. Překresleme si síly do silového trojúhelníku, viz obrázek 3. Označili jsme $\delta = \alpha + \beta = 45\,^\circ$. Vidíme, že horizontální složky $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ se musí vyrušit a že vertikální složka těchto dvou sil pak musí vyrušit $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, kde $\mathbf{g}$ je tíhové zrychlení. Dále již budeme pracovat jenom s velikostmi těchto sil, které již nebudeme značit tučně. Dostáváme dvě rovnice

$$F_1 \sin\delta = F_2 \sin\gamma\,,$$
$$F_1 \cos\delta + F_2 \cos\gamma = mg\,.$$

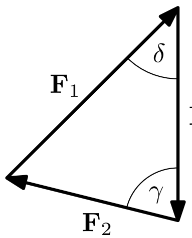
Stačí vyřešit soustavu rovnic o dvou neznámých a dostáváme velikosti sil

$$F_1 = \frac{mg}{\cos\delta + \operatorname{cotg}\gamma\sin\delta} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \doteq 1{,}13\,mg\,,$$

$$F_2 = \frac{mg}{\cos\gamma + \operatorname{cotg}\delta\sin\gamma} = \frac{\sqrt{17}}{5} \doteq 0{,}825\,mg\,,$$

kde jsme úhel γ určili z obrázku 2 pomocí vztahu $\sin\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Pokud by soustava byla složitější, mohli bychom použít momentovou větu, ale tady jsme si vystačili s jednou relativně jednoduchou rovnováhou sil. Na tyč 1 působí tlakem síla $1{,}13\,mg$, na tyč 2 působí tahem síla $0{,}825\,mg$ a tyč 4 je dle předpokladů bez síly.



Obr. 3: Náčrt sil působících v bodě B.

Archimédova spirála

Jde o standardní křivku. Možností, jak ji vyjádřit, je více. Můžeme například využít nějaké t jako parametr a v polárních souřadnicích pak rovnici spirály $r = at$ a $\varphi = 2\pi t$. Převod na kartézské souřadnice je $x = at\cos(2\pi t)$ a $y = at\sin(2\pi t)$.

Nebo využijeme přímo úhel φ a můžeme psát $r = \frac{a\varphi}{2\pi}$. Převodní vztahy jsou $x = \frac{a\varphi}{2\pi}\cos\varphi$ a $y = \frac{a\varphi}{2\pi}\sin\varphi$.

Pokud bychom chtěli určit dráhu, kterou urazí bod po křivce (z $\varphi_{\min}$ do $\varphi_{\max}$), dostali bychom poměrně komplikovaný vztah

$$l = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{a}{2\pi}\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{1+\varphi^2} d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{argsinh}\varphi\right]_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}}.$$

Integrál si můžete zkusit spočítat sami. Pokud nevíte jak začít, použijte substituci $\varphi = \sinh u$.

Šroubovice

Opět jde o jednoduchou úlohu. Rovnici pro šroubovici lze napsat ve válcových souřadnicích jako

$$r = R\,,$$
$$\varphi = 2\pi t\,,$$
$$z = at\,,$$

kde t je opět parametr, který bychom mohli přeškálovat. Důležité je si uvědomit, že jde o pohyb po válci. Spirála má rovnoměrnou stoupavost, takže když si válec rozvineme do roviny, jedná se o pohyb po přímce, resp. úsečkách. Délku jednoho závitu pak můžeme určit snadno jako

$$l_1 = \sqrt{z^2(1) + (\varphi(1)r)^2} = \sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}\,.$$

Pokud bychom chtěli zobecnit délku spirály v závislosti na posunu v parametru t, dostali bychom následující rovnici

$$l(t) = t\sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}\,.$$

Zajímavé souřadnicové soustavy

V zadání jsou explicitně vynechané souřadnicové soustavy, které jsou v knihovničce Fyzikální olympiády. Bohatší nabídku souřadnicových soustav můžete nalézt například na anglické Wikipedii, kde je vyjmenovaná více jak desítka ortogonálních souřadnicových systémů.[6]

Podívejme se například na bipolární souřadnicový systém[7]. Ten je podobný polárnímu, ale liší se tím, že zde máme dvě ohniska místo jednoho. Souřadnice tak mohou být využity pro popis pole v okolí dvou nabitých válců. Souřadnice σ a τ o stejné hodnotě jsou v obou případech kružnice. Jedna z nich prochází vždy oběma ohnisky, kdežto druhá neprotíná ani jedno a obkružuje právě jedno ohnisko (resp. s výjimkou přímky kolmé k jejich spojnici, což je taková deformovaná kružnice). Souřadnice σ je definovaná jako úhel mezi levým ohniskem, polohou bodu a druhým ohniskem. Druhá souřadnice je daná logaritmickým poměrem vzdáleností od ohnisek, tedy $\tau = \ln \frac{d_1}{d_2}$. Pokud je vzdálenost mezi ohnisky $2a$, pak platí pro převod souřadnic

$$x = a\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}\,, \quad x = a\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}\,.$$

Opačným převodem je

$$\operatorname{tgh}\tau = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}\,, \quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\,.$$

Pokud vezmeme bipolární systém a zrotujeme ho v 3D okolo středu, a to okolo osy kolmé ke spojnici ohnisek, dostáváme toroidní souřadnice.[8] Ty mohou být dobré u popisu pole tokamaku.

Poznámky k došlým řešením

Nejvíce řešení bylo z druhé části této úlohy, na druhou stranu bonus neposlal skoro nikdo. Pozitivně hodnotíme zlepšení v psaní číselných hodnot na odpovídající počty platných cifer, ale stále s tím mělo hodně řešitelů problémy. Také se často vyskytují jednotky napsané italikou-/skloněným písmem, ačkoli by měly být stojatě. Dalším častým špatným návykem je nepsání postupu či odpovědi.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_coordinates`
[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Bipolar_coordinates`
[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_coordinates`

Pouze Veronika H. našla nějaké chyby v autorském řešení z minulého dílu, díky čemuž si vysloužila 2,5 bodu k řešení navíc. Můžete zasílat opravy i k jiným úlohám než k seriálu, a to i zpětně z tohoto ročníku, ale pouze k aktuálním verzím souborů, které máme na webu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.