Úloha III.4 ... beruška na gumě

8 bodů; průměr 4,68; řešilo 65 studentů

Beruška leze rychlostí $4\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. *Když ji postavíme na gumu* $40\,\mathrm{cm}$ *dlouhou, přeleze ji za* $10\,\mathrm{s}$. *Co když ale v okamžiku, kdy beruška začne lézt, začneme gumu natahovat tak, že se její délka bude zvětšovat rychlostí* $5\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$*? Může dolézt na konec? Pokud ano, jak dlouho jí to bude trvat? Guma se roztahuje rovnoměrně a nikdy se nepřetrhne.* *Matěj koukal na Vsauce.*

Na první pohled se beruščina cesta může zdát nekonečná. Jak by se mohla dostat na druhý konec, když se tento konec pohybuje vyšší rychlostí? Zkusme to spočítat.

Rychlost pohybu berušky vůči gumě si označíme v' a rychlost natahování gumy si označíme u. Počáteční délka gumy je l. V čase t bude délka gumy $l' = l + ut$. Guma se tím jakoby „zředí" v poměru l'/l – pokud v tomto okamžiku beruška urazí vzdálenost x', v tomto úseku bude obsažena pouze vzdálenost

$$x = \frac{l}{l'}x' = \frac{l}{l+ut}x'$$

z původní gumy. Rychlost je přímo úměrná uražené dráze, takže rychlost berušky vůči původní gumě bude podobně

$$v = \frac{l}{l+ut}v'\,.$$

Hodnota v' je konstantní, zatímco v konstanta není. To vede na jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{l+ut}v'\,.$$

Rovnici lze řešit například separací proměnných. Stačí zintegrovat pravou stranu podle času a dostaneme

$$x = \int_0^t \frac{l}{l+ut}v'\mathrm{d}t = \left[\frac{lv'}{u}\ln\left(\frac{l}{u}+t\right)\right]_0^t = \frac{lv'}{u}\ln\left(1+\frac{ut}{l}\right)\,.$$

O přirozeném logaritmu víme, že je to rostoucí funkce a že jde v limitě do nekonečna. Proto vidíme, že ať si na gumě zvolíme jakoukoli konečnou vzdálenost, beruška ji vždy urazí v konečném čase.

Hledáme okamžik, ve kterém beruška doleze na konec gumy, tedy kdy bude platit $x = l$. Z rovnice pro vzdálenost výše si vyjádříme čas

$$t = \frac{l}{u}\left(\mathrm{e}^{\frac{u}{v'}} - 1\right)\,.$$

Řešení zřejmě existuje pro libovolné kladné hodnoty l, v a u. Pro ty ze zadání vychází $t \doteq 20\,\mathrm{s}$. Fyzikální analogii k tomuto příkladu můžeme najít například v rozpínání vesmíru, ve kterém fotony cestují konstantní rychlostí. Kdyby se vesmír rozpínal také stále stejnou rychlostí, tak by k nám teoreticky v konečném čase doletěly fotony z libovolné vzdálenosti a my bychom tak jednou mohli vidět celý vesmír (pokud je konečný). Problém je ale v tom, že rozpínání vesmíru konstantní není a tak existuje hranice, za kterou vůbec nikdy nedohlédneme.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`