

Úloha V.3 . . . Matějova vysněná koule 6 bodů; průměr 2,34; řešilo 53 studentů

Přesně na hraně stolu leží homogenní koule o poloměru r . Jelikož je to „polovratká“ poloha, začne koule padat ze stolu. Na jakou úhlovou rychlost se roztočí? Předpokládejte, že koule neprokluzuje. *Matějovi se ztratil tenisák.*

Jakmile koule začne padat, začne se roztáčet okolo bodu dotyku se stolem (tedy přesně na hraně stolu). V určitém okamžiku ale odstředivá síla převáží a koule se od stolu oddělí a dál se bude od stolu vzdalovat. To může nastat ještě předtím, než se otočí o 90° . Úhel, o který se koule pootočí kolem hrany stolu vůči původní poloze, označíme φ .

Budeme se zabývat situací před oddělením koule od stolu. Jelikož je tření dostatečně velké, můžeme vyjít ze zákona zachování energie.¹ Změna potenciální energie při náklonu o úhel φ je

$$\Delta E = mgr(1 - \cos \varphi).$$

Kinetická energie koule otáčející se kolem bodu na jejím povrchu je

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2,$$

kde ω je úhlová rychlost a J je moment setrvačnosti vůči bodu otáčení, který jsme spočítali pomocí Steinerovy věty

$$J = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2.$$

Z rovnosti energií můžeme vyjádřit vztah mezi úhlem náklonu φ a úhlovou rychlostí

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{7r}(1 - \cos \varphi)}.$$

Koule se odpojí ve chvíli, kdy odstředivé zrychlení $r\omega^2$ překoná dostředivé zrychlení způsobené složkou tíhového zrychlení $g \cos \varphi$. Z rovnosti zrychlení dostáváme

$$g \cos \varphi = r\omega^2 = \frac{10g}{7}(1 - \cos \varphi),$$

$$\cos \varphi = \frac{10}{17}.$$

Dosažením do vztahu pro ω už snadno spočítáme úhlovou rychlost v okamžiku odpojení

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{17r}}.$$

Tato úhlová rychlost kouli zůstane po celou dobu pádu, protože na ní už nebude působit žádný další moment sil.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Energie se nikde neztrácí, nic neprokluzuje ani nedochází k žádným nepružným srážkám.