

## Úloha VI.E ... viskozita

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte dynamickou viskozitu dvou různých olejů Stokesovou metodou.

*Jáchym ukradl Jirkovi nápad ukrást tuto úlohu z praktik.*

## Teorie

Tato úloha je založena na měření doby pádu kuličky ve válci naplněném olejem. Pro úspěšné změření úlohy je stěžejní Stokesova rovnice, která popisuje vztah mezi odporovou hydrodynamickou silou  $F_d$  a dynamickou viskozitou kapaliny  $\eta$

$$F_d = 6\pi\eta r v,$$

kde  $r$  je poloměr kulovitých částic pohybujících se v daném prostředí a  $v$  je jejich rychlost. Rovnice však platí pouze za předpokladu, že proudění okolo kuličky je laminární. To zjistíme výpočtem Reynoldsova čísla

$$\text{Re} = \frac{2r\varrho v}{\eta}, \quad (1)$$

kde  $\varrho$  je hustota prostředí. Čím je Reynoldsovo číslo menší, tím spíše je proudění laminární. Konkrétní hodnota při které se mění charakter proudění neexistuje, ale řádově se jedná o několik set až pár tisíc.

Předpokládáme, že kulička v oleji velmi rychle dosáhne terminální rychlosti a dále už nebude zrychlovat. Potom je výslednice sil nulová, neboli  $F_d = F_g - F_{vz}$ . Dosazením dostáváme

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho_k - \varrho) g,$$

kde  $\varrho_k$  je hustota kuličky. Odtud si už můžeme vyjádřit dynamickou viskozitu

$$\eta = \frac{2r^2 (\varrho_k - \varrho) g}{9v} = \frac{2r^2 (\varrho_k - \varrho) g t}{9l},$$

kde rychlost  $v$  vypočítáme z doby pádu kuličky  $t$  mezi dvěma značkami, jejichž vzdálenost je  $l$ .

V našem případě jsme pracovali s kapalinou v odměrném válci. Musíme tedy do Stokesova zákona ještě započítat tzv. Wall effect<sup>1</sup>, který zohledňuje poměr  $(r/R)$ , kde  $r$  je poloměr kuličky a  $R$  je vnitřní poloměr odměrného válce. Upravený Stokesův vzorec potom vypadá následovně

$$F_x = 6\pi\eta r v \left(1 - 2,4 \frac{r}{R}\right)$$

a výsledný vztah pro dynamickou viskozitu, do kterého budeme dosazovat, se změní na

$$\eta = \frac{2r^2 (\varrho_k - \varrho) g t}{9 \left(1 - 2,4 \frac{r}{R}\right) l}. \quad (2)$$

<sup>1</sup><https://www.kvis.ac.th/userfiles/files/Stokes%20law%20and%20laminar%20flow.pdf>

## Měření Reynoldsova čísla

Při měření jsme měli k dispozici dva druhy kuliček (označené barvami – žlutá a bílá) a dva oleje – ricinový a olivový olej. Hodnoty Reynoldsova čísla jsme zjišťovali pro každou kombinaci barva-olej. V tabulkách jsme našli hodnoty hustoty a dynamické viskozity pro oba oleje:

- ricinový olej:  $\rho_R = (962 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\eta_R = 0,986 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ ,
- olivový olej:  $\rho_O = (913 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\eta_O = 84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Stanovili jsme vzdálenosti  $l$  pro oba oleje, měřené pásovým měřidlem s nejistotou měření  $\sigma_l = 1 \text{ mm}$ , a vyšlo nám  $l_R = (69 \pm 1) \text{ mm}$  a  $l_O = (174 \pm 1) \text{ mm}$ . Tyto vzdálenosti jsou různé z důvodu odlišných rychlostí kuliček v jednotlivých olejích.

Následně jsme měřili průměr  $d$  kuliček pomocí mikroskopu s hodnotou nejmenšího dílku  $\sigma_d = 0,01 \text{ mm}$ . Časový interval  $t$  pádu kuličky v oleji byl měřen ručně stopkami, reakční dobu při měření času jsme odhadli na  $\sigma_t = 0,1 \text{ s}$ . Výsledky z těchto měření jsou v tabulkách 1 a 2.

kulička	žlutá	bílá
$i$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$
1	3,03	1,59
2	2,93	1,59
3	2,95	1,57
4	3,03	1,56
5	3,05	1,56
$\bar{d}$	3,00	1,57
$\sigma_d$	0,02	0,01

Tab. 1: Naměřené hodnoty průměrů kuliček  $d$ .

olej kulička	ricinový		olivový	
	žlutá	bílá	žlutá	bílá
$i$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
1	9,16	29,72	2,67	6,61
2	8,82	29,51	2,36	6,65
3	9,22	29,22	2,56	6,36
$\bar{t}$	9,1	29,5	2,5	6,5
$\sigma_t$	0,2	0,2	0,1	0,1

Tab. 2: Naměřené hodnoty času  $t$  pro všechny kombinace kuliček a olejů.

Dosazením za rychlost do rovnice (1) jsme dostali výraz

$$\text{Re} = \frac{d\rho l}{\eta t},$$

odkud jsme spočítali hodnoty Reynoldsova čísla pro všechny čtyři kombinace, viz tabulka 3. Vzhledem k tomu, že se jedná jen o orientační hodnoty, výpočet chyby jsme zanedbali.

	ricinový olej	olivový olej
žlutá kulička	$2,22 \cdot 10^{-2}$	2,27
bílá kulička	$0,36 \cdot 10^{-2}$	0,46

Tab. 3: Orientační hodnoty Reynoldsova čísla.

### Měření dynamické viskozity

Z hodnot Reynoldsova čísla jsme usoudili, že bude nejlepší použít žlutou kuličku v ricinovém oleji a bílou kuličku v olivovém oleji. Pro každou kombinaci barva-olej jsme měřili dynamickou viskozitu pětkrát a jejich hodnoty zprůměrovali.

Ještě předtím jsme pomocí posuvného měřidla změřili poloměry nádob odměrných válců  $R_R = (29,71 \pm 0,01)$  mm a  $R_O = (28,86 \pm 0,06)$  mm. Rovněž jsme stanovili hustoty kuliček pyknometrickou metodou.<sup>2</sup> Za použití dvou různých pyknometrů o objemu 10 ml, digitálních vah s přesností  $\sigma_m = 0,0005$  g a destilované vody o hustotě  $\rho = 996,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  jsme naměřili hodnoty  $\rho_z = (2390 \pm 80) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $\rho_b = (2440 \pm 80) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Při měření času  $t$  jsme ponechali stejné vzdálenosti  $l$ , neboli  $l_R = (69 \pm 1)$  mm a pro olivový olej  $l_O = (174 \pm 1)$  mm. Abychom dosazovali přímo námi naměřené hodnoty, upravili jsme vzorec (2) na

$$\eta = \frac{d^2 (\rho_k - \rho) g t}{18 \left(1 - 1,2 \frac{d}{R}\right) l},$$

kde jsme za tíhové zrychlení dosadili  $g = 9,81373 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , což odpovídá hodnotě v Praze. Výsledky měření průměru  $d$  a času  $t$  jsou v tabulce 4. Z jejich průměrných hodnot jsme spočítali dynamickou viskozitu

$$\begin{aligned} \eta_R &= (1,00 \pm 0,11) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \eta_O &= (82 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Nejistota měření dynamické viskozity byla určena ze vzorce pro šíření nejistot. Zde jsme použili aproximaci  $\sigma_{\rho_k} \gg \sigma_{\rho}$ , čili jsme zanedbali chybu viskozity olejů, a dostali jsme

$$\sigma_{\eta} \approx \eta \sqrt{\left(\frac{R - 0,6d}{R - 1,2d} \frac{2\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho_k}}{\rho_k - \rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{R}{1,2d} - 1\right)^{-2} \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2}. \quad (3)$$

### Diskuze

Při výpočtu Reynoldsova čísla nám šlo zejména o řádový odhad, abychom věděli, zda je splněna podmínka laminárního proudění. Proto jsme si mohli dovolit zanedbat nepatrnou odchylku v tabulkových hodnotách hustoty a dynamické viskozity u obou druhů olejů.

Tabulková hodnota viskozity ricinového oleje je  $\eta = 0,986 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ , což se v rámci chyby měření shoduje s vypočítanou hodnotou viskozity při měření se žlutými kuličkami. Hodnota viskozity olivového oleje nalezena v tabulkách je  $\eta = 84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ , což je rovněž v rozmezí naší naměřené chyby.

<sup>2</sup>[https://cs.wikibooks.org/wiki/Laboratorn%C3%AD\\_tehnika/Pyknometrick%C3%A9\\_stanoven%C3%AD\\_hustoty](https://cs.wikibooks.org/wiki/Laboratorn%C3%AD_tehnika/Pyknometrick%C3%A9_stanoven%C3%AD_hustoty)

kulička $i$	žlutá		bílá	
	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
1	3,00	8,97	1,58	6,28
2	2,76	9,75	1,58	6,38
3	3,02	8,76	1,59	6,50
4	2,98	8,74	1,57	6,59
5	2,95	8,94	1,58	6,44
$\bar{x}$	2,94	9,0	1,580	6,44
$\sigma_x$	0,10	0,4	0,007	0,12

Tab. 4: Měření dynamické viskozity

Podíváme-li se na vzorec pro výpočet celkové nejistoty měření dynamické viskozity (3), na první pohled má největší podíl na výsledné chybě průměr  $d$  a hustota  $\rho$ , což může být za užití nelaboratorního náčiní kritické pro zhodnocení přesnosti celého měření. Při měření v laboratoři jsme dosáhli celkové relativní chyby v rozmezí 5% až 6%. Je tedy pochopitelné, že relativní chyby při měření doma mohou dosahovat i desítek procent. Důležitější než výsledná hodnota chyb je především jejich řádné zdokumentování a zdůvodnění vlivu okolních podmínek na celkové chybě měření.

### Závěr

Změřili jsme dynamickou viskozitu dvou různých olejů. Pro ricinový olej nám vyšlo

$$\eta_{\text{R}} = (1,00 \pm 0,11) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1},$$

pro olivový olej jsme dostali

$$\eta_{\text{O}} = (82 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}.$$

**Jiří Vala**  
j.vala@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.