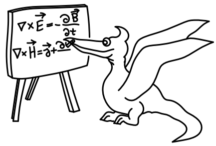


Seriál: Vlny

Vlny jsou jevem, při kterém vícero oscilátorů rozmístěných v prostoru osciluje dohromady tak, že vytváří určitou předvídatelnou dynamiku. Fyzika vln má mnoho společného s fyzikou oscilací a vlastně představuje pouze rozšíření našich předchozích poznatků z diskrétních systémů do kontinuálních systémů. Obdobně jako jsme pro oscilátory vždy museli odvodit dynamické rovnice pohybu, musíme pro vlny odvodit tzv. vlnovou rovnici. To si předvedeme na jednoduchém příkladu napnuté struny, kde odvodíme některé základní pojmy, o které musíme naše chápání oscilací rozšířit, abychom pak dokázali popsat vlnění.

Napnutá struna

Uvažujme strunu, která se nachází podél osy x tak, že jeden její konec je v počátku a druhý v bodě l. Na strunu působí napětí[1] T a to vždy v tečném směru. Délková hmotnost struny je λ, celkem tedy váží $m = \lambda l$.

Dále předpokládejme, že struna kmitá pouze kolmo na osu x. Výchylku z rovnovážné polohy označíme jako $u(x, t)$, jelikož se může měnit jednak s polohou x a zároveň s časem t.

Uvědomme si, že toto je velmi silný předpoklad. Můžeme si jej ale odůvodnit jednoduchou úvahou – uvažujeme pouze velmi malé výchylky, takže tečný směr na strunu je všude přibližně rovnoběžný s osou x. To znamená, že napětí ve směru x je téměř rovno T podél celé délky struny. Protože na každý její úsek působí z obou stran stejně, žádný z nich nemá důvod pohybovat se ve směru osy x.

Náš úkol zní následovně – při určitém profilu výchylek $u(x, t)$ určit, jaké jsou síly působící na jednotlivé části struny a jak jednotlivé úseky struny zrychlují. Zřejmě nás zajímá pouze síla ve směru výchylky. Ukážeme si, jak spočítat její změnu podél x.

Zastavme na chvíli čas a předpokládejme $u = u(x)$. Úsek se středem v bodě x působí na své sousedy silou T v tečném směru k funkci u. Označíme-li sklon tečny od vodorovného směru φ, bude platit $u' = \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$,[2] protože, jak jsme již řekli dříve, struna je skoro vodorovná a úhel φ je velmi malý.[3] Zde u' značí derivaci funkce u podle prostorové souřadnice. Svislá složka této síly bude $T_y = T \sin\varphi \approx T\varphi$. Má-li náš úsek délku $\mathrm{d}x$ a jeho těžiště se nachází v bodě x, znamená to, že jeho pravý okraj bude mít souřadnici $x + \mathrm{d}x/2$. V tomto bodě na něj ve svislém směru působí napětí $T_y(x + \mathrm{d}x/2)$. Obdobně pro levý okraj. Změnu síly můžeme spočítat jako rozdíl mezi pravým a levým okrajem, neboli

$$\mathrm{d}F = T_y\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}\right) - T_y\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}\right) = T\left(\varphi\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\right) .$$

[1] Napětím zde myslíme napěťovou sílu, nikoliv napěťovou sílu na jednotku plochy, jak se někdy napětí definuje.

[2] První rovnost jednoduše platí, stačí si uvědomit, že jak funkce $\operatorname{tg}\varphi$, tak u' odpovídají sklonu tečny k funkci $u(x)$ v daném bodě (pro malý element $\mathrm{d}x$ a odpovídající změnu $\mathrm{d}u$ platí $\mathrm{d}u = \operatorname{tg}\varphi\,\mathrm{d}x$).

[3] Opravdu, nakreslete si funkce $y = \operatorname{tg} x$ a $y = x$ vedle sebe a zjistíte, že pro malé výchylky je jejich rozdíl zanedbatelný. To je princip lineární aproximace v nějakém bodě (nahrazení funkcí přímkou, která má v daném bodě stejný sklon jako původní funkce).

Funkci $\varphi(x)$ sice neznáme, ale pro velmi malé a jí můžeme lokálně aproximovat[4] její tečnou

$$\varphi(x+a) \approx \varphi(x) + \varphi'(x)\,a + \dots\,.$$

Za a dosadíme $\pm\,\mathrm{d}x/2$, bude tedy dokonce libovolně malé. Dosazením dostáváme

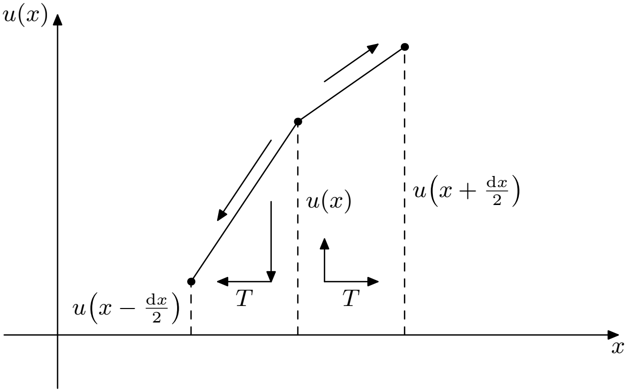
$$\mathrm{d}F \approx T\left(\left(\varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) - \left(\varphi(x) - \varphi'(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\right) = T\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Máme výsledek[5]

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = T\varphi' \approx Tu'' = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Zdůrazněme, že jsme pracovali pouze s funkcí $u = u(x)$ při zastaveném čase. Zajímá-li nás časový vývoj systému, musíme přejít k původní funkci $u = u(x,t)$ a k parciálním derivacím. Zrychlení spočítáme z druhého Newtonova zákona. Úsek o délce $\mathrm{d}x$ váží $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$, pro sílu platí $\mathrm{d}F = \mathrm{d}m\ddot{u}$, kde tečka tentokrát znamená časovou derivaci. Výsledná vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$



Obr. 1: Úsek struny o délce $\mathrm{d}x$, na který působí síly od sousedních úseků. Ty jsou znázorněny v rozložení do horizontálního a vertikálního směru.

V tomto případě budeme konstantní hodnotu T/λ označovat jako v^2. Rozměrovou analýzou lze určit, že v má jednotku rychlosti, a ukazuje se, že v skutečně odpovídá tzv. fázové rychlosti vln.

Vlnová rovnice plní stejnou roli jako rovnice pro zrychlení při zkoumání oscilací jednoho oscilátoru. Můžeme také nalézt obdobu přirozené frekvence pro jeden oscilátor, ale nejprve si ukážeme některé možnosti řešení vlnové rovnice.

[4]Opět používáme lineární aproximaci. Pro obecnou aproximaci bychom použili Taylorovu řadu, kterou si v případě zájmu můžete vyhledat. Zde nám stačí jen její první dva členy, protože další už by byly pro malé $\mathrm{d}x$ zanedbatelné.

[5]U funkce $u(x,t)$ nahrazujeme obyčejné derivace, např. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, derivacemi parciálními, např. $\frac{\partial u}{\partial x}$, což je běžné pro funkce, které závisí na více proměnných. Rozdíl je v podstatě v tom, že u obyčejné derivace bychom ještě museli uvažovat, jak jednotlivé parametry funkce u (tedy x a t) závisí na sobě navzájem, u parciální nemusíme.

Rovinné vlny

Jelikož vlnění se vlastně skládá z jednotlivých oscilátorů, můžeme zkusit zjistit, zda jednoduché oscilace mohou být řešením vlnové rovnice. Předpokládejme tedy, že řešení vlnové rovnice bude ve tvaru

$$\hat{u}(x,t) = U(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,,$$

kde $U(x)$ je funkce určující amplitudu oscilací v závislosti na pozici. Opět, řešení vlnové rovnice musí být reálné, ale zavedením komplexního řešení $\hat{u}(x,t)$ si zjednodušíme algebru. Reálné řešení pak získáme jako $u(x,t) = \mathrm{Re}\,\hat{u}(x,t)$. Dosazením do vlnové rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} U(x)\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}t^2} &= v^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\,,\\ U(x)\left(-\omega^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} &= v^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\,,\\ \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2}U(x)\,. \end{aligned}$$

Tuto rovnici známe, pouze jsme místo proměnné pozice používali čas – jedná se o rovnici jednoduchých harmonických kmitů. Řešení tedy můžeme psát jako

$$U(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

kde A je (potenciálně komplexní) konstanta, a k je reálné číslo. Většinou nazýváme k *vlnové číslo*. Dosazením do předchozí rovnice pak dostáváme vztah

$$-k^2A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -\frac{\omega^2}{v^2}U(x) \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = k^2v^2\,.$$

Tato rovnice se nazývá *disperzní vztah* – určuje, jak se frekvence vlny mění s vlnovým číslem příslušícím dané vlně. Konečně, komplexní řešení vlnové rovnice je

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,.$$

Reálné řešení je $u(x,t) = |A|\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$, kde

$$A = |A|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

udává amplitudu $|A|$ i fázový posun φ.

Podobně jako u oscilací, vlnová rovnice je lineární rovnice, a tím pádem můžeme její řešení tvořit lineárními kombinacemi známých řešení. Například kombinace

$$\hat{u}'(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}$$

je také řešením vlnové rovnice.

Rovinné vlny lze také popsat jako translaci (posouvání) profilu $U(x)$ s ubíhajícím časem t. Abychom toto chování lépe viděli, píšeme

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-vt)}\,,$$

kde jsme využili disperzní vztah (a předpokládali, že ω i k jsou kladné). Vidíme, že vlna se v tomto případě posouvá doprava (směrem k rostoucímu x). Na druhou stranu, v případě, že máme řešení

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x+vt)}\,,$$

vlna se posouvá doleva (ke klesajícímu x).

Fourierovská substituce

Obdobně jako při oscilacích, diferenciální vlnovou rovnici můžeme nahradit algebraickou rovnicí. Pro řešení rovnic pomocí rovinných vln (pohybujících se doprava) použijeme

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega\,, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to \mathrm{i}k\,,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \to -k^2\,.$$

Aplikací této substituce můžeme odvodit disperzní vztah přímo z vlnové rovnice.

Okrajové podmínky

Jelikož vlny nevyplňují celý prostor, konkrétní tvar řešení je okrajem oblasti, ve které existují, omezen pomocí tzv. okrajových podmínek. Například pokud máme strunu napnutou mezi dvěma body, pak se v bodech, kde je uchycená, nehýbe. Naopak pokud bychom měli lano uchycené v jednom bodě a v druhém by bylo volné, pak by se v jednom bodě nehýbalo a v druhém by byla síla, která lano vrací do rovnovážné polohy, nulová. To odpovídá podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

v daném bodě. Tyto body efektivně představují rozhraní, od kterých se vlny mohou odrážet. V obecném případě by vlny mohly také pronikat za rozhraní, ale ve výše uvedených případech vlny nemohou existovat za rozhraním a proto dochází pouze k odrazu. Ten lze vyjádřit tak, že předpokládáme formu řešení, které je superpozicí dvou rovinných vln pohybujících se opačným směrem, potenciálně s rozdílnou amplitudou a fázovým posunem. Příklad takového řešení si ukážeme níže.

Stojaté vlnění

Mějme strunu, která je napnutá mezi dvěma body, na kterých se nehýbe. Výchylka struny z napnuté polohy u splňuje vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Mezi body je celková vzdálenost L. Naším úkolem bude určit stabilní dynamiku struny, tj. určit $u(x,t)$, které vede pouze k opakování stejného cyklu. Okrajové podmínky můžeme určit po zavedení souřadnicové soustavy. Zvolme ji tak, že jeden z bodů je v počátku souřadnic, a druhý tedy podél osy x ve vzdálenosti L. Pak platí

$$u(0,t) = 0 = u(L,t)\ .$$

Předpokládejme nyní, že hledané řešení se skládá ze dvou rovinných vln – jedné, která se pohybuje doprava, a jedné, která se pohybuje doleva. Pak pro komplexní výchylku platí

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}\,.$$

Z vlnové rovnice lze odvodit disperzní vztah

$$\omega^2 = v^2 k^2\,,$$

kde $v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$. Neznámé jsou tedy A, B a k, jelikož ω je určená jako $\omega = vk$ (předpokládáme, že k je kladné – záporné k je obsažené ve vlně pohybující se druhým směrem). První okrajová podmínka vede na

$$0 = \hat{u}(0,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad \Rightarrow \quad A = -B\,,$$

druhá implikuje

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}(L,t) = -B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL-\omega t)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kL+\omega t)}\,, \\ 0 &= B\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\right)\,. \end{aligned}$$

S použitím $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ můžeme psát

$$\begin{aligned} 0 &= B\left(\cos(kL) - \mathrm{i}\sin(kL) - \cos(kL) - \mathrm{i}\sin(kL)\right)\,, \\ 0 &= -2\mathrm{i}B\sin(kL)\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že buď máme triviální řešení $B = 0$, kdy se struna nevlní, nebo platí

$$kL = n\pi\,,$$

kde n je celé (dle předpokladu kladné) číslo, což vede k tomu, že $\sin(kL) = 0$. Neurčené konstanty jsou tedy pouze absolutní hodnota a fáze B, což odpovídá amplitudě a globální fázi vlnění. Výchylka struny splňuje (dosazením známých veličin)

$$\hat{u}(x,t) = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}\right) = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}(-2\mathrm{i})\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

S použitím $B = |B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ máme

$$\hat{u}(x,t) = 2\,|B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Reálná výchylka je

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathrm{Re}\,\hat{u}(x,t) &= 2\,|B|\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \\ &= -2\,|B|\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t - \varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,. \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli určit $|B|$ či φ (a popřípadě n), museli bychom znát výchylku v celém rozsahu struny v určitý čas. Například bychom mohli vědět, že v čase $t = 0$ platí

$$u(x,0) = C\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\,,$$

kde C je známá reálná konstanta. Potom bychom měli

$$C\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = -2\,|B|\sin(-\varphi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Zřejmě by tedy muselo platit $n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $|B| = \frac{C}{2}$. Obecný vývoj by byl

$$u(x,t) = -2\frac{C}{2}\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{\pi}{L}t - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = C\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) .$$

V tomto výrazu už není žádná neznámá, tudíž jsme zvládli popsat dynamiku struny. Všimněme si, že k tomu bylo zapotřebí použít superpozici dvou řešení – jedné vlny pohybující se doprava a jedné doleva. Toto je typické pro stojaté vlnění, jedná se o reprezentaci odrážení vlnění od okrajů systému, jak bylo uvedeno v předchozí sekci.

Tlumení

Tlumení, tj. ztráta energie vlnění, může být přítomno ve vlnové rovnici skrze členy obsahující derivace prvního stupně. Tyto derivace mohou být buďto vzhledem k poloze x nebo vzhledem k času t. Probereme pouze příklad s derivací vzhledem k času, ale příklad s derivací vzhledem k poloze je velmi podobný.

Uvažujme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

kde γ je síla tlumení. Pro komplexní výchylku můžeme provést fourierovskou substituci

$$-\omega^2\hat{u} - \mathrm{i}\gamma\omega\hat{u} = -k^2v^2\hat{u}$$

a disperzní vztah bude

$$\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega = k^2v^2 .$$

Máme před sebou netriviální úkol – je potřeba vyřešit komplexní kvadratickou rovnici. Chybám se nejlépe vyhneme pomocí doplnění na čtverec

$$\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} = \left(\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} = k^2v^2 ,$$

$$\left(\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\right)^2 = k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4} .$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď je tlumení relativně slabé a platí $k^2v^2 > \frac{\gamma^2}{4}$, pak

$$\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}} .$$

Pro silné tlumení platí $k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4} < 0$ a výsledek lze psát jako

$$\omega = -\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - k^2v^2} .$$

V prvním případě se frekvence stala komplexním číslem, v druhém dokonce imaginárním číslem pro dané reálné k. Jak máme takovou hodnotu interpretovat? Dosaďme hodnotu pro slabé tlumení do oscilující části rovinné vlny

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)t} = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} .$$

Vidíme, že reálná čás frekvence stále odpovídá oscilacím, ale imaginární část představuje exponenciální pokles amplitudy výchylky s ubíhajícím časem, přičemž konstanta poklesu je $\frac{\gamma}{2}$. Jinak řečeno, čím silnější tlumení, tím rychleji se amplituda oscilací v daném bodě sníží na nulu.

Obdobně bychom mohli řešit členy s první derivací v poloze. Dostali bychom opět komplexní kvadratickou rovnici, ale tentokrát pro vlnové číslo, které by se stalo komplexním. Ještě jedna poznámka zbývá – pokud je tlumení silné, frekvence/vlnové číslo jsou čistě imaginární. To znamená, že systém neosciluje, ale má pouze profil exponenciálního poklesu v čase nebo v prostoru.

Linearizace

Vlnění je přítomno v mnoha spojitých fyzikálních systémech. Důvod k tomu je podobný, jako důvod pro přítomnost harmonických oscilací v diskrétních systémech. V blízkosti stabilního stavu lze totiž systém často aproximovat jako vlnící se systém.

Postup této tzv. linearizace systému je následovný. Nejprve vybereme veličiny, u kterých očekáváme vlnění. Dále tyto veličiny v dynamické rovnici aproximujeme jako malé oscilace okolo rovnovážného stavu. Například, obecnou veličinu $u(x,t)$ bychom mohli approximovat jako $u(x,t) \approx u_0 + u_1(x,t)$, kde u_0 je hodnota v základním stavu a $u_1(x,t)$ je malá výchylka z tohoto stavu ve všech bodech v jakémkoli čase. Konkrétní definice toho, co znamená, že je výchylka malá, už záleží na systému. U horizontálně napnuté struny by to například znamenalo, že výchylka je kdykoli mnohem menší než délka struny. Tuto aproximaci dosadíme do naší dynamické rovnice a ponecháme pouze členy do prvního řádu v u_1. Výsledkem bude rovnice, která je lineární, a velmi často se bude jednat právě o vlnovou rovnici v u_1. Uvedený postup může působit velmi abstraktně, ilustrujeme si ho proto na příkladu vln inspirovaných Bose-Einsteinovým kondenzátem.

Bose-Einsteinův kondenzát je zvláštní stav hmoty, kterého mohou dosáhnout pouze soubory bosonů (určitý typ částic) při velmi nízkých teplotách. Nyní nás nebude zajímat konkrétní povaha tohoto stavu, pouze to, že mu lze připsat vlnovou funkci $\psi(x,t)$, která splňuje tzv. Gross-Pitajevskiho rovnici

$$-\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \left|\psi\right|^2 \psi = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \,,$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty, $\hbar$ je reálná konstanta (tzv. redukovaná Planckova konstanta) a ψ je obecně komplexní. Nebudeme se zde pokoušet o plně kvantové řešení a provedeme tedy několik (poměrně drastických) aproximací. Předpokládejme, že existuje stacionární řešení ψ_0, které je funkcí pouze x a které je reálné. Potom platí

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = \beta \left|\psi_0\right|^2 \psi_0 \,.$$

Nyní aproximujme vlnovou funkci jako

$$\psi(x,t) = \psi_0(x) + \psi_1(x,t) \,,$$

kde $\psi_1(x,t) \ll \psi_0$. Pak máme

$$-\alpha \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \beta \left(\psi_0 + \psi_1\right) \left(\psi_0 + \psi_1^*\right) \left(\psi_0 + \psi_1\right) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \,,$$

kde jsme použili $|\psi|^2 = \psi^*\psi$. Do prvního řádu v ψ_1 platí

$$-\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \beta\left|\psi_0\right|^2\psi_0 - \alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \beta\left(\psi_0^2\psi_1^* + 2\psi_1\psi_0^2\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,.$$

První dva členy se odečtou, jelikož se jedná o definici stacionárního řešení. Pro zbylé členy provedeme fourierovskou substituci, což vede na

$$\alpha k^2\psi_1 + \beta\psi_0^2\psi_1^* + 2\beta\psi_0^2\psi_1 = \hbar\omega\psi_1\,.$$

Rovnice komplexně sdružená k této rovnici je

$$\alpha k^2\psi_1^* + \beta\psi_0^2\psi_1 + 2\beta\psi_0^2\psi_1^* = \hbar\omega\psi_1^*\,.$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostáváme

$$\alpha k^2\left(\psi_1 + \psi_1^*\right) + 3\beta\psi_0^2\left(\psi_1 + \psi_1^*\right) = \hbar\omega\left(\psi_1 + \psi_1^*\right)\,.$$

Vydělením $\psi_1 + \psi_1^* = 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1$ vyjde

$$\alpha k^2 + 3\beta\psi_0^2 = \hbar\omega\,.$$

Tento vztah je odlišný od reálného vztahu pro vlny v Bose-Einsteinově kondenzátu, ale blíží se ke správnému vztahu v limitě $\alpha k^2 \gg 3\beta\psi_0^2$. V této limitě je disperzní zákon kvadratický,

$$\omega = \frac{\alpha}{\hbar}k^2\,,$$

což je například velmi odlišné od vztahu pro vlny na struně, kdy jsme měli $\omega = v\left|k\right|$. Obdobným způsobem lze určit disperzní vztahy pro velké množství systémů, pro které známe dynamické rovnice.

A co dál?

Některé z těchto základních poznatků o vlnách si budete moci procvičit na úlohách seriálu. Čím se tedy budeme zabývat dále? Bude nás čekat obdoba normálních modů pro vlny – budeme řešit ideu polarizace a polarizačních vektorů. Také se pokusíme podívat na trochu modernější příklady vlnění. Ale to až v příštím dílu.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.