

Úloha I.3 ... cyklistický anemometr 5 bodů; průměr 2,72; řešilo 117 studentů

Vašek jede za větrného počasí na kole. Jede-li rovně rychlostí $v = 10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, naměří, že proti němu fouká vítr vodorovně pod úhlem 25° od směru jízdy. Při vyšší rychlosti $v' = 20 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ je tento úhel už jenom 15° . Určete rychlost a směr větru vzhledem k nehybnému pozorovateli.

Vašek si říkal, že na něj při jízdě fouká až moc.

Jedná se o úlohu, kterou vyřešíme vektorovým skládáním rychlostí. Zavedeme souřadnice spojené s nehybným pozorovatelem, ve kterých je rychlost Vaška v prvním případě $\mathbf{v} = (v, 0)$. V druhém případě pak zrychlí na rychlost $\mathbf{v}' = (v', 0)$. Vítr vzhledem k nehybnému pozorovateli vane rychlostí \mathbf{u} zapsanou ve složkách jako $\mathbf{u} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha)$, kde α je úhel, který svírá rychlost větru \mathbf{u} s rychlostí cyklisty \mathbf{v} a je odlišný od úhlu, který pozoruje Vašek v jeho pohybující se soustavě.

Označme \mathbf{w} a \mathbf{w}' rychlost větru vzhledem k Vaškovi v prvním a v druhém případě. Rychlost větru vzhledem k cyklistovi získáme odečtením rychlosti cyklisty od rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli (jedná se vlastně o Galileovu transformaci rychlostí), neboli v obou případech platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}'. \quad (2)$$

Ze zadání víme, že vektor rychlosti větru \mathbf{w} , resp. \mathbf{w}' , svírá s vektorem rychlosti cyklisty úhel $\beta = 155^\circ$, resp. $\gamma = 165^\circ$, pokud na cyklistu fouká vítr zprava, viz obr. 1. Jestliže na něj fouká vítr zleva, platí $\beta = -155^\circ$, $\gamma = -165^\circ$. Rychlosti \mathbf{w} a \mathbf{w}' potom vyjádříme ve složkách jako $\mathbf{w} = (w \cos \beta, w \sin \beta)$ a $\mathbf{w}' = (w' \cos \gamma, w' \sin \gamma)$. Dosadíme-li do rovnic (1), (2) konkrétní složky, dostaneme 4 rovnice

$$w \cos \beta = u \cos \alpha - v, \quad (3)$$

$$w \sin \beta = u \sin \alpha, \quad (4)$$

$$w' \cos \gamma = u \cos \alpha - v', \quad (5)$$

$$w' \sin \gamma = u \sin \alpha. \quad (6)$$

Vyřešením těchto rovnic nalezneme hledanou velikost u rychlosti větru vzhledem k zemi a jeho směr α vztahený na směr rychlosti cyklisty. Rovnic máme akorát, neboť ještě neznáme w a w' . Postupovat můžeme např. následovně. Nejdříve eliminujeme z rovnic w a w' a to tak, že rovnicí (3) vydělíme rovnicí (4), a navíc vzniklou rovnicí vynásobíme faktorem $u \sin \alpha$. Podobné upravy provedeme také s rovnicemi (5) a (6), což vede na soustavu rovnic

$$u \sin \alpha \cotg \beta = u \cos \alpha - v, \quad (7)$$

$$u \sin \alpha \cotg \gamma = u \cos \alpha - v'. \quad (8)$$

Nejdříve nalezneme u . Odečtením rovnice (8) od (7) dostaneme

$$u \sin \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' - v, \quad (9)$$

Dále rovnicí (7) vynásobíme $\cotg \gamma$, rovnicí (8) vynásobíme $\cotg \beta$ a obě rovnice od sebe odečteme, takže dostaneme

$$u \cos \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' \cotg \beta - v \cotg \gamma, \quad (10)$$

Umocnění rovnic (9) a (10) na druhou a jejich součet vede na

$$u^2(\cotg \beta - \cotg \gamma)^2 = (v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2, \quad (11)$$

odkud plyne

$$u = \frac{\sqrt{(v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2}}{|\cotg \beta - \cotg \gamma|}, \quad (12)$$

kde jsme vyloučili záporné řešení.

Nyní nalezneme úhel α . Jednoduchými algebraickými úpravami rovnic (7), (8) dostaneme

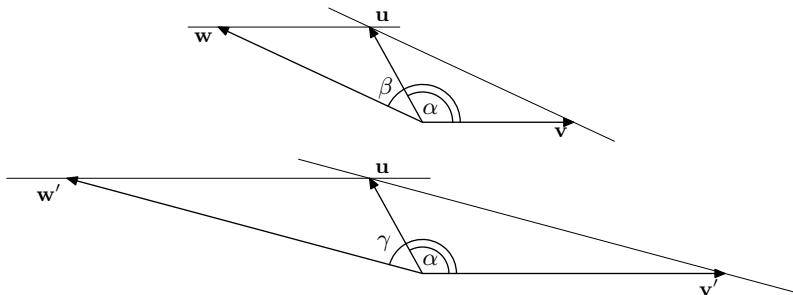
$$u(\cos \alpha - \cotg \beta \sin \alpha) = v, \quad (13)$$

$$u(\cos \alpha - \cotg \gamma \sin \alpha) = v'. \quad (14)$$

Dále vydělením rovnic (13), (14) dostaneme rovnici, ze které vyjádříme $\tg \alpha$ jako

$$\tg \alpha = \frac{v' - v}{v' \cotg \beta - v \cotg \gamma}. \quad (15)$$

Fouká-li na Vaška vítr zprava, dostaneme po číselném dosazení hodnot ze zadání do rovnice (12) velikost rychlosti větru vzhledem k zemi $u \approx 7,2 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rovnice (15) vede v intervalu $(-\pi, \pi]$ pokývajícím všechny směry na dvě řešení, které po číselném dosazení hodnot ze zadání jsou $\alpha \approx 120^\circ$ a $\alpha \approx -60^\circ$. Řešení $\alpha \approx -60^\circ$ však odpovídá zápornému řešení u rovnice (11), a proto představuje stejný vektor \mathbf{u} jako $\alpha \approx 120^\circ$ a $u \approx 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Na závěr doplníme, že v případě, kdy na Vaška fouká vítr zleva, dostaneme řešení $\alpha \approx -120^\circ$ a $u \approx 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Obr. 1: Skládání rychlostí. Nahoře má Vašek nižší rychlost, dole vyšší.

Ukážeme si také, jak lze dojít ke správnému řešení rychlejší cestou s pomocí sinové a kosinové věty. Obrázek 1 překreslíme dohromady tak, jak je znázorněno na obrázku 2. Místo úhlů β a γ budeme používat jejich doplňkové úhly $\beta' = 180^\circ - \beta = 25^\circ$ a $\gamma' = 180^\circ - \gamma = 15^\circ$. Aplikací sinové věty na pravý trojúhelník dostaneme rovnost

$$\frac{w}{\sin \gamma'} = \frac{v' - v}{\sin (\beta' - \gamma')},$$

ze které plyne vztah

$$w = \frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin (\beta' - \gamma')}. \quad (16)$$

Dosazením hodnot ze zadání dostáváme $w \approx 14,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Z levého trojúhelníku už tedy známe w , ze zadání samozřejmě také v a úhel β' , a chceme najít u a úhel α . V obou případech si poradíme kosínovou větou. Pro první případ použijeme kosínovou větu s úhlem β' ve tvaru

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \beta'. \quad (17)$$

Odmocněním a dosazením za w z rovnice (16) získáme vztah pro výpočet velikosti rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli

$$u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')} \right)^2 - 2v(v' - v) \frac{\sin \gamma' \cos \beta'}{\sin(\beta' - \gamma')}}. \quad (18)$$

V našem konkrétním případě má velikost $u \approx 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, tedy výsledek se shoduje s prvním způsobem výpočtu. Jinou aplikací kosínové věty na levý trojúhelník v obr. 2 dostaneme vztah

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos \alpha,$$

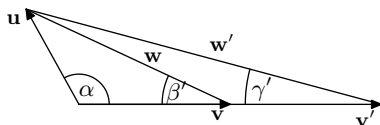
ze kterého jednoduše plyne

$$\cos \alpha = \frac{v^2 + u^2 - w^2}{2vu}.$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě zjednodušit pomocí rovnice (17) následovně

$$\cos \alpha = \frac{v - w \cos \beta'}{u},$$

čímž jsme získali vztah pro výpočet úhlu α . Dosadíme-li do něho za w z rovnice (16) a za u z rovnice (18) a poté číselné hodnoty ze zadání, dostáváme v rozsahu $(-180^\circ, 180^\circ]$ dvě řešení $\alpha \approx 120^\circ$ a $\alpha \approx -120^\circ$, které odpovídají případu, kdy fouká vítr na Vaška zprava a zleva. Zcela správně by řešení $\alpha \approx -120^\circ$ mělo odpovídat úhlům $\beta' - 25^\circ$, $\gamma' = -15^\circ$. Všimněte si však, že rovnice v druhém způsobu výpočtu nejsou k současně změně znamének úhlů β' a γ' citlivé. Tento postup je tedy v souladu s prvním způsobem výpočtu.



Obr. 2: Druhý způsob skládání rychlostí.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.