

Úloha I.4 ... solární plachetnice

8 bodů; průměr 3,62; řešilo 104 studentů

Ve vzdálenosti 0,8 au od Slunce se vznáší solární plachetnice ve tvaru tenké desky o ploše $S = 500 \text{ m}^2$ s plošnou hustotou $\sigma = 1,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$. Jakou silou na ni působí záření dopadající ze Slunce v okamžiku, kdy se plachetnice právě začíná pohybovat? Jaké bude v mít tu chvíli zrychlení? Zářivý výkon Slunce je $L_{\odot} = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Předpokládejte, že záření dopadá na plachetnici kolmo a odráží se pružně.

Nápověda Doporučujeme najít zrychlení při malé počáteční rychlosti v_0 a poté dosadit $v_0 = 0$. *Danka si chce zalétat.*

Slnko vysiela svetelné žiarenie vo forme fotónov, ktoré sú nositeľmi hybnosti. Ich hybnosť p je daná ich energiou E podľa kvantovej fyziky ako $p = \frac{E}{c}$, kde c je rýchlosť svetla. Podľa 2. Newtonovho zákona je sila pôsobiaca na plachtu daná podielom zmeny jej hybnosti a času, za ktorý táto zmena nastane

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Pri dopade fotónu na povrch plachty sa fotón dokonale pružne odrazí, pričom pri pružnej zrážke sa zachováva celková energia aj hybnosť sústavy.

Uvažujme, že fotón s hybnosťou p_0 narazí do dosky (plachetnice), ktorá sa od neho pohybuje rýchlosťou v_0 a má hmotnosť m . Potom sa fotón odrazí späť s hybnosťou p , ktorá smeruje od dosky, teda má opačný smer ako p_0 . Doska po tejto interakcii s fotónom pokračuje v pohybe v pôvodnom smere, teraz už rýchlosťou v (má smer rovnaký ako v_0 a p_0). Zákon zachovania hybnosti (ZZH) má teda tvar

$$p_0 + mv_0 = -p + mv.$$

Napíšeme si tiež zákon zachovania energie (ZZE)

$$p_0 c + \frac{1}{2}mv_0^2 = pc + \frac{1}{2}mv^2.$$

Zo ZZH si vyjadríme p , dosadíme do ZZE a riešime kvadratickú rovnicu pre v . S využitím vzorca $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sa úpravami dopracujeme k výrazu

$$v = -c + \sqrt{(v_0 + c)^2 + \frac{4p_0c}{m}}.$$

Za predpokladu $(v_0 + c)^2 \gg \frac{4p_0c}{m}$, ktorý je v tomto prípade iste splnený (pretože ľavá strana je viac ako c^2 , zatiaľ čo pravá strana obsahuje hybnosť fotónu), môžeme použiť aproximáciu

$$v \approx -c + (v_0 + c) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4p_0c}{m(v_0 + c)^2} \right) = v_0 + \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Zmena rýchlosti dosky v dôsledku odrazu fotónu bude teda

$$\Delta v = v - v_0 = \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Ak predpokladáme, že doska bola pred nárazom v pokoji (teda $v_0 = 0$), alebo sa pohybovala dostatočne pomaly (teda platí $v_0 \ll c$), pre zmenu rýchlosti dosky a následne zmenu hybnosti dostávame

$$\Delta v = \frac{2p_0}{m} \Rightarrow \Delta p = 2p_0.$$

Po dosazení tohto výrazu do 2. Newtonovho zákona máme

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2p_0}{\Delta t}.$$

Hodnotu p_0 získame z energie slnečného žiarenia. Za čas Δt na plachtu dopadne žiarenie s energiou

$$E = W\Delta tS.$$

Veličina W je svetelný výkon dopadajúci na jednotku plochy vo vzdialenosti r od Slnka

$$W = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}.$$

Potom pre silu dostávame

$$F = \frac{2p_0}{\Delta t} = \frac{2E}{c\Delta t} = \frac{2WS}{c} = \frac{L_{\odot}S}{2\pi cr^2} \doteq 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Zrýchlenie plachetnice spočítame jednoducho ako

$$a = \frac{F}{m} = \frac{L_{\odot}}{2\pi cr^2\sigma} \doteq 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Na plachtu pôsobí žiarenie Slnka silou 7,1 mN a udáva jej zrýchlenie $10 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.