

Úloha IV.E ... dechberoucí stříkačky

13 bodů; (chybí statistiky)

Určete velikost třecí síly mezi piestem a stěnou injekční stříkačky, která vám přišla poštou.
Dano si vzpomněl na výlet do Ruska.

Úvod

Pri pohybe dvoch telies a pri ich vzájomnom dotyku sú bežne prítomné trecie sily. Ako už iste vieme, trecia sila F_t závisí od zloženia materiálov a na ich tvare, resp. na drsnosti povrchov. Tieto veličiny vieme v jednoduchých prípadoch vyjadriť pomocou koeficientu trenia. Ten sa však v praxi väčšinou určuje experimentálne. Pri klasických stredoškolských úlohách a experimentoch sa pre výpočet trecej sily používa normálová zložka tiažovej sily k povrchu, na ktorom je teleso. V tomto experimente sa budeme snažiť zistiť hodnotu koeficientu medzi stenou striekačky a piestom. K určení koeficientu by sme potrebovali hodnotu normálovej sily, ktorá piest tlačí k stene. Určiť túto hodnotu je však netriviálne. Preto nám zostáva meranie hodnoty trecej sily. To by sme mohli vykonať priamo, napríklad silomerom. Ukážeme si ale iný spôsob riešenia, založený na rozpínaní a stlačovaní plynu vo vnútri striekačky.

Postup merania

Ako prvé utesníme piest, čo v našom prípade bolo použitím prsta na ruke. Natiahneme piest, čím v striekačke vznikne podtlak a následne ho pustíme. Tlaková sila, ktorá bude na piest pôsobiť sa ho bude snažiť vrátiť do pôvodnej polohy, ale to sa jej nepodarí úplne, pretože proti nej bude pôsobiť trecia sila. V mieste, kde sa piest zastaví by mala byť dynamická trecia sila vyvolaná rozdielom tlakov v rovnováhe, z čoho už dokážeme vypočítať hodnotu dynamickej trecej sily.

Aby náš model fungoval, musíme piest púšťať pri spätnom pohybe pomaly (avšak kontinuálne). Ak by sme mu totiž umožnili získať vyššiu rýchlosť, tak kvôli zotrvačnosti by mohol prekmitnúť rovnovážnu polohu významnejším spôsobom a následne by sa do nej už nevrátil kvôli vyššej hodnote statického trenia (oproti dynamickej sile trenia).

V druhom prípade zase postupujeme tak, že piest stlačíme na objem menší ako pôvodný a následne ho uvoľníme do finálnej polohy, v ktorej sa opäť vyrovná tlaková a trecia sila.

Teória

Správanie plynu vnútri striekačky môžeme popísať stavovou rovnicou

$$pV = nRT,$$

kde p je tlak, V je objem, n predstavuje počet mólov plynu, R je univerzálna plynová konštanta a T je teplota plynu v Kelvinoch. Vzduch vo vnútri striekačky budeme považovať za adiabaticky izolovaný, a tak počítame s tým, že si nevymieňa teplo s okolím. Adiabatický dej je popísaný vzťahom

$$pV^\kappa = \text{konst},$$

kde κ je Poissonova konštanta. Pre vzduch je $\kappa \approx 1,4$. Pre silu spôsobenú vzduchom v pieste v rovnovážnej polohe máme

$$F_t = F_v = (p_a - p) S,$$

kde S je plocha piestu, resp. prierez valcovej časti striekačky a zároveň p_a je počiatkový tlak vo vnútri piestu, ktorý je rovný atmosférickému tlaku. Dosadením z rovnice adiabatického deja dostávame

$$F_t = \left(1 - \left(\frac{V_{\text{init}}}{V_{\text{end}}} \right)^\kappa \right) p_a S , \quad (1)$$

kde V_{init} , V_{end} je počiatkový, resp. konečný objem vzduchu v pieste.

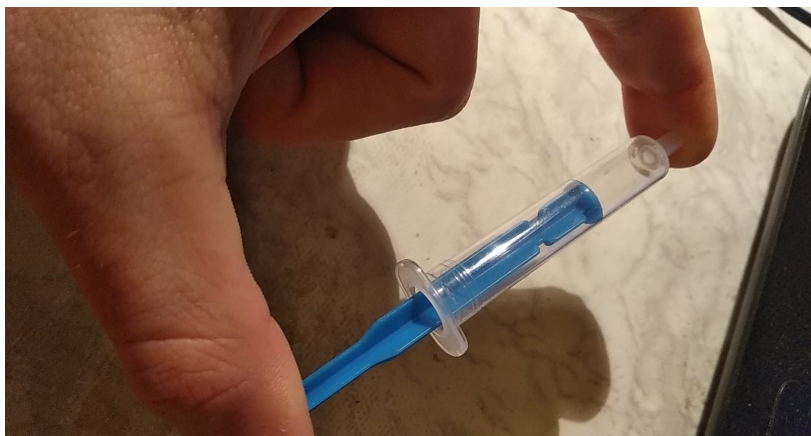
Opačným spôsobom merania by sme nechali vykonávať prácu vzduch vo vnútri striekačky. Teda postupom, že najprv piest stlačíme a potom ho necháme expandovať. Výpočet bude popísaný podobnou rovnicou

$$F'_t = \left(\left(\frac{V'_{\text{init}}}{V'_{\text{end}}} \right)^\kappa - 1 \right) p_a S . \quad (2)$$

Meranie

Zistili sme podmienky merania počas experimentu. Tlak vzduchu v miestnosti bol nameraný ako $p_a = (92,0 \pm 0,2)$ kPa a teplota v miestnosti bola $T_V = (294,3 \pm 0,2)$ K. Experiment sme vykonali so striekačkou s objemom 3 ml. Pomocou posuvného meradla s noniusom sme odmerali priemer piestu a jeho hodnota bola $d = (9,14 \pm 0,02)$ mm. Nepresnosť posuvného meradla je 0,02 mm podľa kalibračnej normy. Prierez tak bol $S = \pi d^2 / 4 = (65,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, kde sme odchýlku určili ako $\sigma(S) = 2S \frac{\sigma(d)}{d}$. Namerané hodnoty sú v tabuľke 1.

Striekačku sme mali uzavretú jedným prstom ako na obrázku 1. Po natiahnutí a opätovnom príbrzdenom pustení (bez dotyku piestu v koncovej fáze) sme odčítali hodnoty. Neistota merania objemu je $\sigma_m(V) = 0,05$ ml.



Obr. 1: Meranie s injekčnou striekačkou.

Tab. 1: Meranie zastavenia piestu z rôznych maximálnych objemov pre začiatočný objem $V_{\text{init}} = (1,00 \pm 0,05)$ ml a natiahnutia na objem V_{max} .

Meranie	$\frac{V_{\text{max}}}{\text{ml}}$	$\frac{V_{\text{end}}}{\text{ml}}$
1	1,30	1,30
2	1,40	1,35
3	1,60	1,30
4	1,80	1,30
5	2,00	1,30
6	2,20	1,30
7	2,40	1,30
8	2,60	1,35
9	2,80	1,35
10	3,00	1,30

Zo štatistického spracovania máme pre rovnovážnu polohu objem $\bar{V}_{\text{end}} = (1,315 \pm 0,008)$ ml. Celkovú chybu objemu v rovnovážnej polohe určíme ako kvadratický súčet štatistickej chyby $\sigma(\bar{V}) = 0,008$ ml a chyby meradla $\sigma_m(V) = 0,05$ ml, resp.

$$\sigma(V) = \sqrt{\sigma(\bar{V}) + \sigma_m(V)} \doteq 0,05 \text{ ml}.$$

Dostávame tak $V_{\text{end}} = (1,32 \pm 0,05)$ ml. Dosadením do vzťahu pre treciu silu (1) vychádza

$$F_t = (1,9 \pm 0,4) \text{ N},$$

kde sme chybu určili zo vzorca

$$\begin{aligned} \sigma(F_t) &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_t}{\partial V_{\text{init}}}\sigma_m(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial V_{\text{end}}}\sigma(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial p_a}\sigma(p_a)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial S}\sigma(S)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\kappa p_a S \left(\frac{V_{\text{init}}}{V_{\text{end}}}\right)^\kappa\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_m(V)}{V_{\text{init}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(V)}{V_{\text{end}}}\right)^2\right) + F_t^2 \left(\left(\frac{\sigma(p_a)}{p_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(S)}{S}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Porovnanie opačného pohybu piestu

Pre porovnanie vyskúšame aj druhú metódu, kedy bude konať prácu od trecej sily vzduch v injekčnej striekačke. Postupujeme podobne, a teda na začiatku si zvolíme objem (kvôli presnosti merania maximálny možný), postupne stlačíme vzduch na nami zvolené objemy a následne pomaly (približne niekoľko sekúnd) púšťame, avšak aby sme nijako neovplyvnili koncovú fázu zastavenia. Výsledky sú v tabuľke 2. Neistota merania objemu je $\sigma_m(V) = 0,05$ ml.

Z údajov, kedy bol najmenší objem vyšší ako 1,5 ml tak dostávame údaj pre rovnovážnu polohu $\bar{V}'_{\text{end}} = (2,29 \pm 0,02)$ ml. Kde sme kombinovanú odchýlku opäť získali pomocou štatistickej a systematickej chyby. Aj v tomto prípade bola štatistická chyba zanedbateľná a vyšlo $V'_{\text{end}} = (2,29 \pm 0,05)$ ml.

Tab. 2: Meranie zastavenia piestu po kompresii na V_{\min} a následnej expanzii vzduchu pri začiatočnom objeme $V'_{\text{init}} = (3,00 \pm 0,05)$ ml.

Meranie	$\frac{V_{\min}}{\text{ml}}$	$\frac{V'_{\text{end}}}{\text{ml}}$
1	2,30	2,35
2	2,20	2,30
3	2,10	2,35
4	2,00	2,30
5	1,80	2,25
6	1,60	2,20
7	1,40	2,25
8	1,20	2,15
9	1,00	2,10
10	0,80	2,00
11	0,60	1,95
12	0,40	1,85

Podľa (2) sme spočítali hodnotu trecej sily

$$F'_t = (2,8 \pm 0,3) \text{ N.}$$

Chybu sme určili rovnako ako pri predchádzajúcej metóde.

Diskusia

Pri experimente bolo prítomných viacero faktorov, ktoré mohli ovplyvniť výsledky merania. Počítali sme s modelom ideálneho plynu, a to samozrejme v reálnom svete len približuje fyzikálnu skutočnosť. Ako ďalší fakt, ktorý ovplyvňoval meranie bolo použitie modelu adiabatického deja. Ten predpokladá, že nie je prítomná výmena tepla s okolím (prípadne, že deje prebehnú tak rýchlo, aby sa teplo nestihlo predať). Dĺžka trvania experimentu bola len niekoľko sekúnd napriek pomalšiemu uvoľňovaniu.

Výmena tepla medzi vzduchom vo vnútri striekačky a medzi stenami striekačky nepochybne prebiehala. Skutočný dej mal preto správanie medzi adiabatickým a izotermickým procesom. Ďalším zdrojom tepla bol aj fakt, že sme striekačku pridržiavali prstami, ktoré mali vyššiu teplotu ako okolie. Avšak tepelné výmeny sme z dôvodu relatívne krátkeho meracieho procesu zanedbali. Zároveň je plast pomerne dobrým izolantom.

Predpokladali sme, že vzduch neuniká pri vyššom tlaku ako bol tlak okolia. Rovnako sme zanedbali aj prípadné prúdenie do vnútra striekačky. A to pre miesto, ktoré izoloval piest, a tiež pre utesnenie rukou na výstupe striekačky. Tlak atmosféry na strane piestu sme uvažovali za konštantný v každom okamihu.

V prípade opačného postupu, kedy sme vzduch stlačili a sledovali jeho návrat (expanziu), si musíme uvedomiť, že vtedy koná prácu vzduch vo vnútri striekačky. Odobrané teplo cez steny striekačky vedením tepla zo systému znamenalo, že tlak mohol byť v skutočnosti nižší ako sme namerali. To sa dialo prostredníctvom odovzdania tepla okoliu (steny striekačky).

Hodnota merania F'_t v tomto smere tak pravdepodobne horšie zodpovedá adiabatickému modelu z hľadiska malých rozmerov sledovaného objektu.

V prvom postupe sa vzduch mierne zohrieval od okolia, čo naopak zvyšovalo tlak vo vnútri. Ďalšou skutočnosťou, ktorá mohla ovplyvniť merania bolo, že sme predpokladali vo všetkých miestach rovnakú treciu silu, avšak toto nemuselo byť splnené. Rovnako účinok trecej sily môže byť iný pri pohybe jedným alebo opačným smerom. Najvýznamnejším zdrojom odchýlky bolo najmä určenie objemu a s tým spojené určenie týchto hodnôt. Presnejšia stupnica by vedela túto nepresnosť znížiť.

Taktiež sme pri porovnávaní metód neuvažovali prípadnú zmenu koeficientu trenia pri pohybe opačným smerom. Z údajov, ktoré zodpovedajú pre najväčšiu nami vytvorenú kompresiu (teda najmenšie objemy) vidíme, že už zreteľne dochádza k výraznejším stratám energie.

Záver

Zmerali sme silové pôsobenia a uviedli sme dôvody, pre ktoré by mala byť metóda konania práce atmosférou rozumnejšou resp. správnu voľbou. Hodnota trecej sily tak bola $F_t = (1,9 \pm 0,4)$ N v smere od väčších objemov k menším. V opačnom smere (kedy prácu konal vzduch vo vnútri) sme touto aproximáciou dostali $F'_t = (2,8 \pm 0,3)$ N. Táto hodnota je podľa očakávaní vyššia, a to z dôvodu, že prácu konal vzduch vo vnútri striekačky a nie okolitá atmosféra.

Ivan Hudák
hudakivan@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.