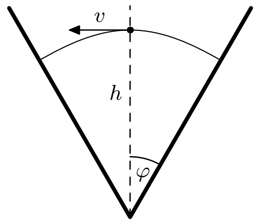
Úloha V.4 ... perioda velkých kmitů

7 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel $2\varphi < \pi$. Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky h nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí v ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polorovin.

Legolase už nudí periody malých kmitů.



Budeme hľadať symetrické riešenie – čiže hmotný bod bude behať po jednej parabole. Jej vrchol je zrejme na ose, čiže rýchlosť, ktorou ho máme hodiť bude mať nulovú zložku v smere y. Zároveň bude treba, aby $v \equiv v_x =$ konst, čiže náš hmotný bod musí na polrovinu dopadnúť vždy kolmo. Splňme teda tieto podmienky.

Súradnice hmotného bodu v čase t od hodenia budú

$$x = vt\,,$$
$$y = h - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde sme počiatok umiestnili do spoločnej priamky rovín. V tejto sústave budú súradnice polroviny ležiacej v prvom kvadrante spĺňať

$$y \operatorname{tg} \varphi = x\,.$$

Dosadíme a dostávame kvadratickú rovnicu pre čas dopadu

$$0 = \frac{1}{2}gt_\mathrm{d}^2 \operatorname{tg}\varphi + vt_\mathrm{d} - h \operatorname{tg}\varphi\,,$$

ktorej kladný koreň je

$$t_\mathrm{d} = \frac{v}{g \operatorname{tg}\varphi}\left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2\varphi}{v^2}} - 1\right)\,.$$

No a ako sme už spomínali, tak v tomto čase musí byť vektor rýchlosti kolmý na polrovinu. Symbolicky

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|v_y(t_\mathrm{d})|}{v}\,.$$

Rýchlosť v smere y bude $v_y(t) = -gt$. Podosádzame

$$v \operatorname{tg}\varphi = gt_\mathrm{d} = \frac{v}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2\varphi}{v^2}} - 1\right)$$

a vyjadríme

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2 + \operatorname{tg}^2\varphi}}\,.$$

Čo je zjavne rýchlosť, ktorou musíme náš hmotný bod hodiť (a teda odpoveď na otázku zo zadania).

Ak chceme spočítať periódu, tak to stačí dosadiť späť do vzťahu pre t_d a využiť fakt, že je to presne štvrtina periódy

$$T = 4t_\mathrm{d} = \frac{4v}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}\left(\sqrt{1+\frac{2gh\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}{v^2}}-1\right) = 4\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{2+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}\,.$$

Vidíme, že pre $\varphi \to 0$ ide $T \to 0$, čo celkom dáva zmysel. Zároveň pre $\varphi \to \pi/2$ by sme čakali, že aj $v \to 0$ a pohyb bude čím ďalej, tým viac pripomínať voľný pád, odraz späť, voľný pád na opačnú polrovinu a odraz späť, čiže limita $T \to 4\sqrt{2h/g}$ presne sedí.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz