Úloha V.S ... rezonance a tlumení

10 bodů; (chybí statistiky)

1. *Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x,t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k. Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω, fázové rychlosti v a koeficientu Γ, musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

2. *Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytneme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybujeme, platí $u_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T, λ, L, A a ω_0. Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

Štěpán si hrál se švihadlem.

Lano

Fourierovská substituce nahrazuje časové derivace mocninami $-\mathrm{i}\omega$ a prostorové derivace mocninami $\mathrm{i}k$, kde k je vlnové číslo a ω je frekvence vlnění. Rovnice ze zadání přejde na

$$-\omega^2 \hat{u} = -v^2 k^2 \hat{u} + \mathrm{i}\Gamma k\ \hat{u}\,,$$

kde $\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ je komplexní výchylka. Rovnici vydělíme výrazem $-v^2\hat{u}$ a dostaneme

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{v^2}k\ .$$

Pravou stranu doplníme na čtverec

$$\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\Gamma^2}{4v^4} = k^2 - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{v^2}k\ - \frac{\Gamma^2}{4v^4}\,,$$

$$\frac{1}{4v^4}\left(4\omega^2 v^2 - \Gamma^2\right) = \left(k - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2v^2}\right)^2\,.$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď platí $4\omega^2 v^2 > \Gamma^2$, potom

$$k - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm\frac{1}{2v^2}\sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}\,,$$

$$k = \frac{\mathrm{i}\Gamma \pm \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}}{2v^2}$$

a vlnové číslo k je komplexní. Pro výchylku dostaneme

$$\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} = u_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} \frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}} \mathrm{e}^{-\Gamma \frac{x}{2v^2}} \,.$$

Výchylka má uzel v bodech

$$\frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \,,$$

kde n je celé číslo.

Druhou možností je $4\omega^2 v^2 \leq \Gamma^2$, potom

$$k - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{\mathrm{i}}{2v^2} \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \,,$$

$$k = \frac{\mathrm{i}}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \right)$$

a vlnové číslo k je čistě imaginární. Pro závislost komplexní výchylky v tomto případě platí

$$\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ x - \mathrm{i}\omega t} = u_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \right)} \,.$$

To znamená, že závislost amplitudy na souřadnici x je čistě exponenciální a neobsahuje tedy žádné uzly. Po provedení odmocniny za předpokladu, že Γ, ω a v jsou kladné, dostáváme hledanou podmínku pro existenci uzlů

$$\Gamma < 2\omega v \,.$$

Švihadlo

Druhá část úlohy používá vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,.$$

Můžeme rovnou určit disperzní vztah pomocí fourierovské substituce

$$-\omega^2 = \frac{T}{\lambda} \left(-k^2 \right) \,,$$

$$\omega = |k| \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \,.$$

Obecná rovinná vlna šířící se podél osy x je popsána rovnicí

$$\hat{u}_1(x,t) = B_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \omega_1 t - \varphi_1)} \,,$$

ve které jsou amplituda B_1, vlnové číslo k_1, úhlová frekvence ω_1 a počáteční fáze φ_1 reálná čísla. Podle zadání hledáme řešení ve tvaru dvou proti sobě se pohybujících vln neboli

$$\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \,,$$

kde je bez újmy na obecnosti k_1 kladné a k_2 záporné. Předpokládáme kartézskou soustavu souřadnic, v níž je osa x shodná s klidovým stavem švihadla. Bod, kde se švihadlem pohybujeme, se nachází v $x = 0$. Okrajové podmínky jsou následující. Nejprve musíme zajistit, že začátek švihadla se pohybuje společně s naší rukou

$$\operatorname{Re}\hat{u}(0,t) = A\ \cos(\omega_0 t)\ .$$

Dále, konec švihadla u stěny zůstává nehybný

$$\hat{u}(L,t) = 0\,.$$

Začneme první podmínkou, do které dosadíme $\operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x)$. Následně využijeme sudosti cosinu a nakonec použijeme součtový vzorec

$$\begin{aligned} A\cos(\omega_0 t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = B_1\left(\cos(\omega_1 t)\cos\varphi_1 - \sin(\omega_1 t)\sin\varphi_1\right) \\ + B_2\left(\cos(\omega_2 t)\cos\varphi_2 - \sin(\omega_2 t)\sin\varphi_2\right)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Funkce na levé straně rovnice je sudá, to samé musí platit i pro pravou stranu. Ta se skládá z lineární kombinace sinů a cosinů čili všechny siny se musí sečíst na nulu

$$B_1\sin(\omega_1 t)\sin\varphi_1 + B_2\sin(\omega_2 t)\sin\varphi_2 = 0\,.$$

Aby tato rovnice platila pro všechny časy, obě frekvence musí být stejné neboli $\omega_1 = \omega_2$. Potom jí můžeme vydělit $\sin(\omega_1 t)$ a dostaneme

$$0 = B_1\sin\varphi_1 + B_2\sin\varphi_2\,. \tag{2}$$

Ve vztahu (1) se tedy můžeme zbavit všech sinů. Výsledkem je

$$A\cos(\omega_0 t) = (B_1\cos\varphi_1 + B_2\cos\varphi_2)\cos(\omega_1 t)\ .$$

Opět využijeme toho, že dva cosiny se mohou rovnat jen tehdy, pokud mají stejnou frekvenci $\omega_0 = \omega_1$. Rovnici vydělíme $\cos(\omega_0 t)$, čímž získáme

$$A = B_1\cos\varphi_1 + B_2\cos\varphi_2\,. \tag{3}$$

Tím jsme vyčerpali první podmínku a pokračujeme druhou. Předtím ještě připomeňme, že z rovnosti úhlových frekvencí $\omega_1 = \omega_2$, disperzního vztahu $\omega_0 \propto |k|$ a předpokladu o znaménkách vlnových čísel nutně vyplývá $k_1 = -k_2$. Označme pro jednoduchost $k_1 = k$. Funkci u vyjádříme v obecném bodě x, přičemž se pokusíme oddělit časovou a prostorovou závislost

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \operatorname{Re}\Big(B_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega_0 t-\varphi_1)} + B_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega_0 t-\varphi_2)}\Big) = \\ &= B_1\cos(kx - \omega_0 t - \varphi_1) + B_2\cos(-kx - \omega_0 t - \varphi_2) = \\ &= (B_1\cos(kx - \varphi_1) + B_2\cos(kx + \varphi_2))\cos(\omega_0 t) + \\ &+ (B_1\sin(kx - \varphi_1) - B_2\sin(kx + \varphi_2))\sin(\omega_0 t) = \\ &= f(x)\cos(\omega_0 t) + g(x)\sin(\omega_0 t)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsme zavedli pro zjednodušení zápisu. Druhou podmínku tak můžeme vyjádřit jako

$$0 = f(L)\cos(\omega_0 t) + g(L)\sin(\omega_0 t)\ .$$

V čase $t = 0$ bude sinus nulový, takže pro splnění rovnice bude muset platit $f(L) = 0$. Podobnou úvahou dostaneme $g(L) = 0$. Tyto dvě podmínky jsou zřejmě postačující pro to, aby byl celý výraz nulový ve všech časech.

Začneme například s $f(L) = 0$. Pomocí součtových vzorců se pokusíme oddělit proměnné $B_{1,2}$ a $\varphi_{1,2}$, pro které už máme rovnice výše, od kL. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = f(L) &= B_1 \cos(kL - \varphi_1) + B_2 \cos(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \sin\varphi_1 - B_2 \sin\varphi_2) \sin(kL) + (B_1 \cos\varphi_1 + B_2 \cos\varphi_2) \cos(kL) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Výraz před $\cos(kL)$ je podle (3) roven A. Zároveň vidíme, že $\sin(kL) \neq 0$, protože jinak by platilo $0 = A\cos(kL)$, což by nebylo možné současně splnit. Podmínku tedy můžeme upravit do tvaru

$$-A\frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} = B_1 \sin\varphi_1 - B_2 \sin\varphi_2 \, . \tag{6}$$

Druhá rovnice bude

$$\begin{aligned} 0 = g(L) &= B_1 \sin(kL - \varphi_1) - B_2 \sin(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \cos\varphi_1 - B_2 \cos\varphi_2) \sin(kL) - (B_1 \sin\varphi_1 + B_2 \sin\varphi_2) \cos(kL) \ . \end{aligned} \tag{7}$$

V tomto případě je člen před $\cos(kL)$ díky (2) nulový. Jelikož nemůže být nulový $\sin(kL)$, musí být nulový výraz před ním neboli

$$0 = B_1 \cos\varphi_1 - B_2 \cos\varphi_2 \, . \tag{8}$$

Rovnice (2), (3), (6) a (8) tvoří soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, které můžeme v principu vyřešit. My ale potřebujeme vyjádřit pouze $u(x,t)$. Ukazuje se, že explicitní výrazy pro úhly a amplitudy vln tvořících u hledat nemusíme. Vyjdeme z rovnice (4) a dosadíme za $f(x)$ a $g(x)$. Druhou zmiňovanou funkci máme vyjádřenou ve vztahu (7), akorát jen místo konkrétního bodu L napíšeme obecné x. Dosazením z (2) a (8) snadno zjistíme, že g musí být identicky nulové, píšeme $g(x) \equiv 0$. Funkci $f(x)$ najdeme obdobným způsobem v rovnici (5). Dosadíme pro změnu z (3) a (6) a dostaneme

$$f(x) = -A\frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + A\cos(kx) = A\frac{\sin(k\,(L - x))}{\sin(kL)} \, .$$

Nakonec ještě pomocí disperzního vztahu nahradíme konstanty. Výsledná funkce je

$$u(x,t) = f(x)\cos(\omega_0 t) = A\frac{\sin(k\,(L-x))}{\sin(kL)}\cos(\omega_0 t) = A\frac{\sin\left(\omega_0\,(L-x)\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)}{\sin\left(\omega_0 L\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)}\cos(\omega_0 t) \, .$$

Dosazením $x = 0$ a $x = L$ snadno ověříme, že jsou splněny obě okrajové podmínky.

Řešení má divergující amplitudy v případě, že

$$0 = \sin(kL) = \sin\left(\omega_0 L\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right) \, .$$

To nastává, pokud

$$kL = m\pi \, ,$$

kde m je celé číslo. Vlnovou délku lze vyjádřit jako $l = \frac{2\pi}{k}$, takže platí

$$\frac{2\pi}{l} L = m\pi \quad \Rightarrow \quad 2L = ml\,.$$

Divergující amplituda (která odpovídá rezonanci) se tedy objevuje v případech, kdy je celočíselný násobek vlnové délky roven $2L$ neboli kdy existuje celé číslo m splňující

$$l = \frac{2L}{m}\,.$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz