

Úloha VI.1 ... krasobruslařka

3 body; (chybí statistiky)

Uvažujme krasobruslařku s rozpaženýma rukama, točící se úhlovou rychlostí ω kolem své osy. Jakou úhlovou rychlostí ω' se bude točit, pokud připaží? Jakou práci musí vykonat, aby připažila? Tvar krasobruslařky aproximujte dle svého uvážení.

Skřítek prokrastinoval sledováním krasobruslení.

Nejprve si zavedeme aproximaci těla krasobruslařky. Měla by přibližně odpovídat realitě a přitom zbytečně nekomplikovat výpočty.

Krasobruslařku si tedy pro potřeby výpočtu rozdělíme na hlavu, trup, ruce a nohy. Hlavu budeme aproximovat koulí s poloměrem $r_1 = 0,1$ m a hmotností $m_1 = 6$ kg. Tělo válcem s poloměrem $r_2 = 0,12$ m a hmotností $m_2 = 28$ kg. Nohy budou také válce, s poloměrem $r_3 = 0,06$ m a hmotností $m_3 = 10$ kg. A konečně ruce budou další dva válce, s poloměrem $r_4 = 0,03$ m, délkou $d = 0,7$ m a hmotností $m_4 = 3$ kg.

Pro úplnost je ještě potřeba dodat, že nohy jsou rovnoběžné s osou válce reprezentujícího trup a navzájem se dotýkají. Ruce jsou na tuto osu v rozpaženém stavu kolmé a v připaženém stavu jsou s ní rovnoběžné. Krasobruslařka je v obou případech rovinně symetrická podle dvou kolmých rovin procházejících opět osou válce trupu.

Nyní už se můžeme posunout k samotnému výpočtu změny úhlové rychlosti krasobruslařky. Pokud si označíme J_1 moment setrvačnosti hlavy, J_2 moment setrvačnosti trupu, J_3 moment setrvačnosti nohy, J_{41} moment setrvačnosti rozpažené ruky a J_{42} moment setrvačnosti připažené ruky, potom ze zákona zachování momentu hybnosti platí následující rovnost

$$J_1\omega + J_2\omega + 2J_3\omega + 2J_{41}\omega = J_1\omega' + J_2\omega' + 2J_3\omega' + 2J_{42}\omega',$$

kde ω je úhlová rychlost před připažením a ω' po připažení. Z této rovnice si úpravou můžeme vyjádřit hledanou úhlovou rychlost ω' jako

$$\omega' = \omega \frac{J_1 + J_2 + 2J_3 + 2J_{41}}{J_1 + J_2 + 2J_3 + 2J_{42}}.$$

Zbývá nám spočítat momenty setrvačnosti jednotlivých částí těla krasobruslařky. Hodnoty pro hlavu (koule) a trup (válec) najdeme v tabulkách, u nohy (válec) si pomůžeme Steinerovou větou a u ruky zanedbáme tloušťku (tyč) a opět použijeme hodnotu z tabulek a Steinerovou větu.

- **Hlava:** $J_1 = \frac{2}{5}m_1r_1^2 = 0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Trup:** $J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2 = 0,202 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Noha:** $J_3 = \frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2 = 0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Rozpažená ruka:** $J_{41} = \frac{1}{12}m_4d^2 + m_4(r_2 + \frac{d}{2})^2 = 0,785 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Připažená ruka:** $J_{42} = \frac{1}{2}m_4r_4^2 + m_4(r_2 + r_4)^2 = 0,069 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Vidíme, že největší část celkového momentu setrvačnosti tvoří rozpažené ruce, zvýšení úhlové rychlosti připažením tak bude výrazné. Po dosazení do rovnosti momentů hybnosti dostaneme

$$\omega' = \omega \frac{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + 2(\frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2) + 2(\frac{1}{12}m_4d^2 + m_4(r_2 + \frac{d}{2})^2)}{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + 2(\frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2) + 2(\frac{1}{2}m_4r_4^2 + m_4(r_2 + r_4)^2)}$$

a konečně po dosazení konkrétních hodnot dospějeme k výsledku

$$\omega' = \omega \frac{0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0,2016 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 2(0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2) + 2(0,7852 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0,2016 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 2(0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2) + 2(0,06885 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)} \doteq 4,0\omega.$$

Zbývá spočítat práci W , kterou musí krasobruslařka vykonat. Ta odpovídá změně její celkové kinetické energie. Ta je větší po připažení, protože moment setrvačnosti se sice k -krát snížil, ale úhlová rychlost se zvýšila k^2 -krát. Vykonaná práce tak je

$$W = \frac{1}{2}J'\omega'^2 - \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}J_0\omega(\omega' - \omega) = \frac{1}{2}J_0\omega^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) = \frac{3}{2}J_0\omega^2,$$

kde $J_0 = 1,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ je původní moment setrvačnosti.

Viktor Materna
viktorm@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.