Úloha VI.3 ... třikrát a dost

5 bodů; (chybí statistiky)

Úsek silnice o délce $a = 2{,}8\,\mathrm{km}$ začíná semaforem s periodou T, na kterém signál zeleného světla trvá po dobu $t_1 = 79\,\mathrm{s}$. Na konci tohoto úseku je druhý semafor se stejnou periodou, ale délka trvání téhož signálu je pro něj $t_2 = 53\,\mathrm{s}$. Na obou semaforech se zelené světlo rozsvítí vždy ve stejný okamžik. Spočítejte, za jak dlouho průměrně přejedete celý úsek silnice (včetně čekání na semaforech), pokud se při jízdě pohybujete rychlostí $v = 60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Čas potřebný na rozjezdy a brzdění zanedbejte. *Jáchym jel ze soustředka.*

Obtížnost této úlohy se skrývá v množství případů, které mohou nastat. Potom je prakticky nemožné najít obecné řešení, které by vyhovovalo všem počátečním podmínkám. Úlohu proto budeme řešit konkrétně pro hodnoty ze zadání. V první části se pokusíme co nejjednodušeji odvodit všechny možné scénáře. Ve druhé části spočítáme průměrnou dobu pro každý z nich.

Abychom vůbec věděli, jaké scénáře se snažíme najít, ukážeme si nejdříve konkrétní výpočet pro $T = 120\,\mathrm{s}$.

Označme $t_1' = T - t_1$, $t_2' = T - t_2$ a $\tau_0 = a/v = 168\,\mathrm{s}$. První semafor si můžeme představit jako filtr, který nejdříve po dobu t_1 auta propouští a následně po dobu t_1' nepropouští. Poté, co auto projede prvním filtrem, cestuje čas τ_0 k druhému.

Tady se bude hodit veličina τ, kterou definujeme jako

$$\tau = \tau_0 - nT\,, \tag{1}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby hodnota τ byla vždy mezi 0 a T. Takto definované τ má význam fázového posunu mezi prvním a druhým semaforem. Ten si můžeme představit jako druhý filtr s parametry t_2 a t_2'.

Jak vidíme na obrázku 1, oba semafory lze spojit do jednoho s tím, že ten druhý bude vůči prvnímu posunutý právě o τ. Nyní už jen musíme vyřešit všechny možné situace.

Veličiny τ, t_1 a t_2 dokážeme vyjádřit z číselných hodnot v zadání, čemuž odpovídají i rozměry na obrázku. Jediný neznámý parametr je T. Pokud by hodnota T byla menší, než jaká je na obrázku, úseky t_a až t_d by sice byly jinak dlouhé, ale pořád by pro ně platily stejné rovnice.

Naopak, pokud by byla T výrazně větší, úsek t_c by zcela zanikl. To je druhá možná situace, která může nastat. Vyřešme nejdříve tu první, tj. tu z obrázku 1.

Auto přes semafory v každém případě pojede alespoň čas τ_0. Proto jej v dalších úvahách nebudeme uvažovat a spočítáme pouze čas strávený na semaforech φ. Hledaný celkový čas projetí soustavou potom bude $t = \tau_0 + \varphi$.

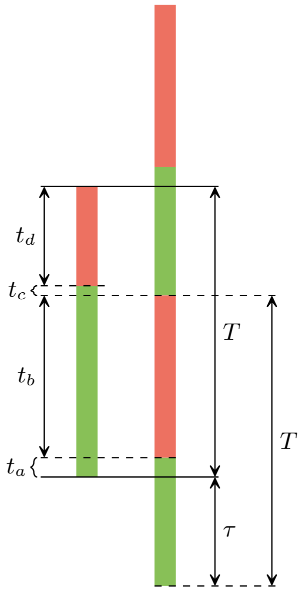
V úsecích t_a a t_c auto jednoduše hned projede oběma semafory. Proto budou odpovídající časy strávené na semaforech $\varphi_a = \varphi_c = 0$.

V dalším úseku už bude situace zajímavější. Pokud auto přijede během času t_b, prvním semaforem projede, ale na druhém bude čekat až do konce t_b. Proto průměrné zpoždění na tomto úseku bude $\varphi_b = t_b/2$.

Obdobně, v poslední části bude auto nejdříve čekat na prvním semaforu, a potom ihned projede druhým semaforem. Dostáváme $\varphi_d = t_d/2$.

Celkové průměrné zpodění spočítáme jednoduše jako součet zpoždění pro možnosti t_a až t_d vážených pravděpodobností toho, že auto dorazí k semaforu právě v dané části periody, tedy

$$\varphi = \frac{t_a}{T}\varphi_a + \frac{t_b}{T}\varphi_b + \frac{t_c}{T}\varphi_c + \frac{t_d}{T}\varphi_d = \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T}\,.$$



Obr. 1: Rozdělení periody $T = 120\,\mathrm{s}$ na časové úseky t_a až t_d. První semafor je vlevo. Z druhého jsou zobrazeny dvě po sobě následující periody, protože je vůči prvnímu posunutý o dobu τ. Platí $t_1 = t_a + t_b + t_c$ a $t_2 = \tau + t_a$.

Nyní už si jen stačí uvědomit, že číselně platí $t_b = t'_2$ a $t_d = t'_1$ čili (pro $T = 120\,\mathrm{s}$) máme výsledek

$$t = \tau_0 + \varphi = \frac{a}{v} + \frac{(T - t_1)^2 + (T - t_2)^2}{2T} = 194\,\mathrm{s}\,.$$

Toto je ale výsledek jen pro jeden konkrétní případ. Pokud by byly zadané parametry jiné, jednotlivé časové úseky by mohly vypadat úplně jinak. Například by se mohla překrývat místa, ve kterých je na obou semaforech červená, a podobně. Pojďme tedy postupně projít všechny možné scénáře.

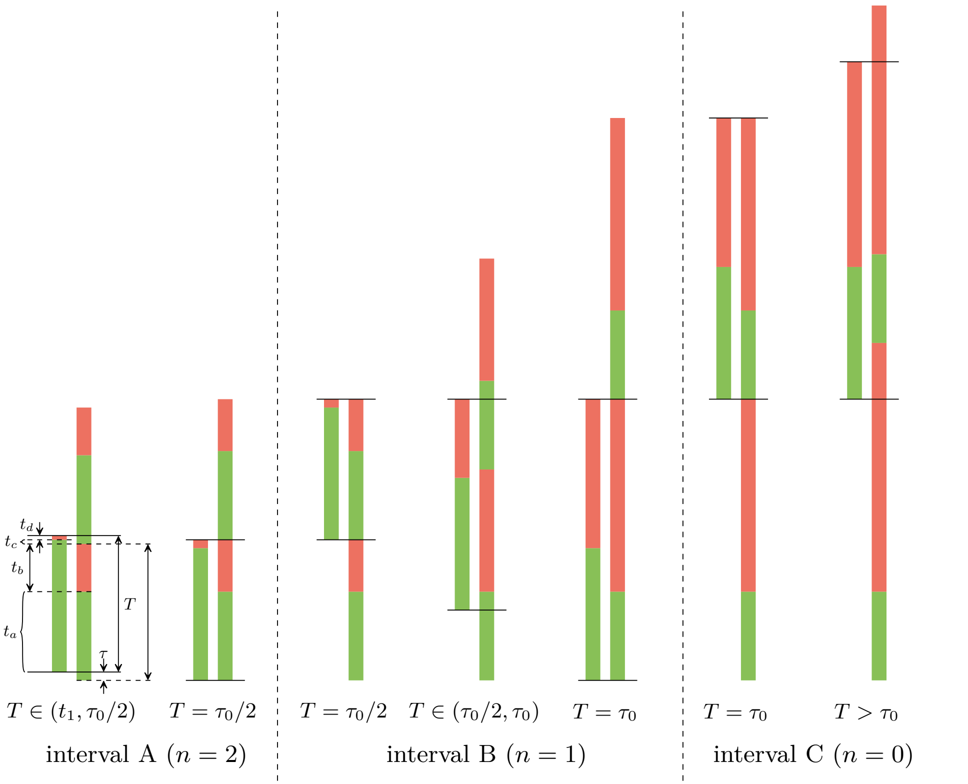
Reálné hodnoty T se zřejmě pohybují v intervalu $\langle t_1, \infty)$. Ten si rozdělíme na úseky

$$A = \left\langle t_1, \frac{\tau_0}{2} \right) , \quad B = \left\langle \frac{\tau_0}{2}, \tau_0 \right) , \quad C = \langle \tau_0, \infty) \,.$$

Tyto úseky jsme zvolili proto, že se v nich mění hodnota n z rovnice (1). V A, B a C je n rovno postupně 2, 1 a 0.

Interval A

Začněme s $T = t_1$ (v tom případě by na prvním semaforu nikdy nebyla červená) a představme si, co se bude dít, když budeme zvětšovat periodu T až do $T = \tau_0/2 = 84\,\mathrm{s}$. První semafor bude



Obr. 2: Znázornění situace pro postupně rostoucí hodnotu T.

stále tvořen ze zelené a červené části o délkách

$$x_\mathrm{z} = t_1 \,,$$
$$x_\mathrm{č} = T - t_1 \,.$$

Červená se (překvapivě) s rostoucí T prodlužuje. Naopak druhý se bude skládat ze zeleného, červeného a opět zeleného úseku s délkami

$$y_\mathrm{z} = t_2 - \tau \,,$$
$$y_\mathrm{č} = T - t_2 \,,$$
$$y'_\mathrm{z} = \tau \,.$$

Situace se z našeho pohledu změní tehdy, kdy ji bude nutné popsat jinými rovnicemi. K tomu může dojít jen v bodech, ve kterých hranice úseků z druhého semaforu přejde přes hranici úseků v prvním semaforu. Hraniční body prvního semaforu jsou zřejmě v časech

$$\begin{aligned} X_1 &= x_\mathrm{z} &&= t_1\,, \\ X_2 &= x_\mathrm{z} + x_\mathrm{č} &&= T\,. \end{aligned}$$

Naopak u druhého semaforu to jsou

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_\mathrm{z} &&= t_2 - \tau\,, \\ Y_2 &= y_\mathrm{z} + y_\mathrm{č} &&= T - \tau\,, \\ Y_3 &= y_\mathrm{z} + y_\mathrm{č} + y'_\mathrm{z} &&= T\,. \end{aligned}$$

Poslední body u každého semaforu, tj. X_2 a Y_3, jsou ale zřejmě rovny T. Nemusíme je uvažovat proto, že k jejich překročení dojde právě mezi časovými obdobími A, B a C (stejně jako jsme neuvažovali bod $X_0 = 0$, který je díky periodicitě vždy shodný s X_2). Zatím se však stále pohybujeme v A, kde mohou nastat celkem dva přechody, konkrétně $X_1 = Y_1$ a $X_1 = Y_2$.

Pro první platí

$$X_1 = Y_1 \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{z} = y_\mathrm{z} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 - \tau\,.$$

Jelikož jsme v A, víme, že $n = 2$, takže dokážeme přímo dosadit za τ do vztahu (1). Dostáváme

$$t_1 = t_2 - (\tau_0 - 2\alpha_{11}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{11} = \frac{1}{2}\left(t_1 - t_2 + \tau_0\right) = 97\,\mathrm{s}\,,$$

kde α_{11} má význam toho, jaká by musela perioda T, aby při ní došlo k přechodu prvních hraničních bodů. Jelikož $\alpha_{11} > \tau_0/2$, tato situace nenastane v intervalu A, takže se jí také nebudeme zabývat. Naopak pro α_{12} vychází

$$\begin{aligned} X_1 = Y_2 \quad &\Rightarrow \quad x_\mathrm{z} = y_\mathrm{z} + y_\mathrm{č} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \alpha_{12} - \tau = \alpha_{12} - (\tau_0 - 2\alpha_{12}) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{1}{3}\left(t_1 + \tau_0\right) \doteq 82{,}3\,\mathrm{s}\,. \end{aligned}$$

Zřejmě $\alpha_{12} < \tau_0/2$, takže k přechodu dojde v intervalu A.

Zrekapitulujme si, co jsme zatím zjistili. Cílem bylo co nejobecněji popsat všechny možné situace, ke kterým může pro různé hodnoty T dojít. Problém jsme rozdělili na tři intervaly podle toho, jaká je v nich hodnota n. Dále jsme si vyjádřili délky úseků červené a zelené barvy na semaforech. Následně jsme zjistili časy od začátku periody, při kterých dojde na daném semaforu ke změně barvy. Pokud se dva tyto časy z rozdílných semaforů pro nějakou periodu rovnají, dochází v ní ke změně struktury barevných úseků a tedy i ke změně rovnic, které popisují celkovou dobu strávenou na semaforech. Tím se nám intervaly (zatím jen A, další jsme ještě neřešili) rozdělí na podintervaly, které musíme vyřešit zvlášť.

Výše uvedený postup se může zdát zbytečně zdlouhavý, ale snažili jsme se o co největší systematičnost. Jeho výhodou je to, že jej můžeme automaticky, tj. bez dalšího přemýšlení, rovnou aplikovat na další intervaly.

Vraťme se do intervalu A, který se skládá z

$$A_1 = \langle t_1, \alpha_{12})\,, \quad A_2 = \langle \alpha_{12}, \tau_0/2)\,.$$

Řešme nejdříve A_1. Periodu opět rozdělíme na čtyři úseky t_a až t_d, které mají ale samozřejmě jiný význam, než na obrázku 1. V prvním a třetím je zelená na obou stranách, takže $\varphi_a = \varphi_c = 0$. Druhý a čtvrtý mají zelenou i červenou. Důležité ale je, že na druhém semaforu po nich následuje zelená. Zpoždění spočítáme obdobně jako v příkladu dříve, takže dostaneme $\varphi_b = t_b/2$ a $\varphi_d = t_d/2$.

Pro úplnost ještě ukážeme, jak lze přímočaře spočítat délky časových úseků. Jednoduše seřadíme hraniční body od prvního k poslednímu a píšeme

$$\begin{aligned} t_a &= Y_1 &&= t_2 - \tau_0 + 2T\,,\\ t_b &= Y_2 - Y_1 &&= T - t_2\,,\\ t_c &= X_1 - Y_2 &&= t_1 - 3T + \tau_0\,,\\ t_d &= T - X_1 &&= T - t_1\,. \end{aligned}$$

Výsledné zpoždění v intervalu A_1 bude

$$\varphi_{A_1} = \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2 + (T - t_1)^2}{2T}\,.$$

To je shodou okolností stejně jako v ilustračním příkladu výše.

Situace pro A_2 bude ale jiná, jelikož tam platí $Y_2 > X_1$. Znovu dostaneme čtyři úseky, t_a až t_d. První z nich bude zelený na obou stranách, čili $\varphi_a = 0$. Ve druhém však bude na prvním semaforu zelená a na druhém červená s tím, že červená bude trvat ještě po dobu třetího úseku t_c. To znamená, že všechna auta, která přijedou v úseku t_b, budou muset čekat jak průměrně $t_b/2$, tak ještě celé t_c navíc, neboli $\varphi_b = t_b/2 + t_c$.

V posledních dvou úsecích bude na prvním semaforu vždy červená. Přijede-li auto na první semafor během úseku t_c, bude muset opět čekat nejen svůj průměrný čas $t_c/2$, ale i t_d. Proto platí $\varphi_c = t_c/2 + t_d$. Čekání v posledním úseku bude jednoduše $\varphi_d = t_d/2$.

Časy spočítáme jako

$$\begin{aligned} t_a &= Y_1 &&= t_2 - \tau_0 + 2T\,,\\ t_b &= X_1 - Y_1 &&= t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T\,,\\ t_c &= Y_2 - X_1 &&= 3T - t_1 - \tau_0\,,\\ t_d &= T - Y_2 &&= \tau_0 - 2T\,. \end{aligned}$$

Pro výsledné zpoždění v intervalu A_2 dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi_{A_2} &= \frac{t_b\,(t_b + 2t_c) + t_c\,(t_c + 2t_d) + t_d^2}{2T} = \frac{(t_b + t_c + t_d)^2 - 2t_b t_d}{2T} = \\ &= \frac{(\tau_0 - t_2 - T)^2 - 2\,(t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T)\,(\tau_0 - 2T)}{2T}\,. \end{aligned}$$

Ostatní intervaly

Interval B si rozdělíme na části B' a B''. V B' jsou na druhém semaforu postupně červený, zelený a červený úsek. V případě B'' je to naopak, tedy zelený, červený a zelený. Při řešení postupujeme analogicky jako v intervalu A s tím rozdílem, že tentokrát platí $n = 1$ čili z (1) plyne $\tau = \tau_0 - T$.

Interval B' přejde v B'' pro hodnotu periody β. Každý z těchto intervalů se dále rozdělí na dva, které označíme po řadě B'_1, B'_2, B''_1 a B''_2. Hraniční časy budou β'_{12} a β''_{12}. Poslední interval C se rozdělí na C_1, C_2 a C_3 podle časů γ_{12} a γ_{11}. V nich bude τ rovno τ_0.

Nyní uvedeme podrobné výpočty, vedoucí k těmto závěrům. Veličiny x_z, $x_\mathrm{č}$ a X_1 jsou všude stejné. Naopak u druhého filtru se liší jak délky úseků, tak barvy. Příslušné rovnice jsou v tabulce 1. Z nich jsme spočítali Y_1 a Y_2, viz tabulku 2. Hraniční časy vyšly

$$\begin{aligned}
\beta &= \tau_0 - t_2 && = 115\,\mathrm{s}\,,\\
\beta'_{11} &= \frac{1}{2}\left(t_1 + \tau_0\right) && = 123{,}5\,\mathrm{s}\,,\\
\beta'_{12} &= \frac{1}{2}\left(t_1 - t_2 + \tau_0\right) && = 97\,\mathrm{s}\,,\\
\beta''_{11} &= t_1 - t_2 + \tau_0 && = 194\,\mathrm{s}\,,\\
\beta''_{12} &= \frac{1}{2}\left(t_1 + \tau_0\right) && = 123{,}5\,\mathrm{s}\,,\\
\gamma_{11} &= t_1 + \tau_0 && = 247\,\mathrm{s}\,,\\
\gamma_{12} &= t_1 - t_2 + \tau_0 && = 194\,\mathrm{s}\,.
\end{aligned}$$

Jak si můžeme všimnout, β'_{11} a β''_{11} nejsou v odpovídajících intervalech, proto je dále neuvažujeme. Přehled hranic všech intervalů je v tabulce 3. Pro každý podinterval jsme dále spočítali délky časových úseků t_a až t_d, výsledky jsou v tabulce 4. Příslušná zpoždění jsou potom v tabulce 5.

Tab. 1: Délky zelených a červených úseků na druhém semaforu. V první části jsou hodnoty vyjádřené pomocí veličiny τ. Všimněme si, že výsledky pro dvojice intervalů A a B'' resp. B' a C jsou shodné. Ve druhé části je za τ dosazeno z rovnice (1).

A	B'	B''	C
$y_\mathrm{z} = t_2 - \tau$	$y_\mathrm{č} = T - \tau$	$y_\mathrm{z} = t_2 - \tau$	$y_\mathrm{č} = T - \tau$
$y_\mathrm{č} = T - t_2$	$y_\mathrm{z} = t_2$	$y_\mathrm{č} = T - t_2$	$y_\mathrm{z} = t_2$
$y'_\mathrm{z} = \tau$	$y'_\mathrm{č} = \tau - t_2$	$y'_\mathrm{z} = \tau$	$y'_\mathrm{č} = \tau - t_2$
$y_\mathrm{z} = 2T + t_2 - \tau_0$	$y_\mathrm{č} = 2T - \tau_0$	$y_\mathrm{z} = T + t_2 - \tau_0$	$y_\mathrm{č} = T - \tau_0$
$y_\mathrm{č} = T - t_2$	$y_\mathrm{z} = t_2$	$y_\mathrm{č} = T - t_2$	$y_\mathrm{z} = t_2$
$y'_\mathrm{z} = \tau_0 - 2T$	$y'_\mathrm{č} = \tau_0 - t_2 - T$	$y'_\mathrm{z} = \tau_0 - T$	$y'_\mathrm{č} = \tau_0 - t_2$

Pro přehlednost zopakujme výsledky z první části

$$\begin{aligned}
\varphi_{A_1} &= \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} &&= \frac{\left(T - t_2\right)^2 + \left(T - t_1\right)^2}{2T}\,,\\
\varphi_{A_2} &= \frac{\left(t_b + t_c + t_d\right)^2 - 2t_bt_d}{2T} &&= \frac{\left(\tau_0 - t_2 - T\right)^2 - 2\left(t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T\right)\left(\tau_0 - 2T\right)}{2T}\,.
\end{aligned}$$

Tab. 2: Časy konců prvního a druhého barevného úseku na druhém semaforu.

	Y_1	Y_2
A	$2T - \tau_0 + t_2$	$3T - \tau_0$
B'	$2T - \tau_0$	$2T - \tau_0 + t_2$
B''	$T - \tau_0 + t_2$	$2T - \tau_0$
C	$T - \tau_0$	$T - \tau_0 + t_2$

Tab. 3: Přehled všech intervalů výsledného řešení spolu s časy jejich začátků. Okamžik, ve kterém každý interval končí, je vždy shodný s časem začátku následujícího intervalu. Výjimkou je poslední případ, kde to je ∞s (ano, i takové semafory existují). Číselné hodnoty jsou zaokrouhleny na sekundy.

interval	začátek intervalu		
A_1	t_1		79 s
A_2	α_{12}	$(t_1 + \tau_0)/3$	82 s
B_1'	$\tau_0/2$		84 s
B_2'	β_{12}'	$(t_1 - t_2 + \tau_0)/2$	97 s
B_1''	β	$-t_2 + \tau_0$	115 s
B_2''	β_{12}''	$(t_1 + t_2)/2$	124 s
C_1	τ_0		168 s
C_2	γ_{12}	$t_1 - t_2 + \tau_0$	194 s
C_3	γ_{11}	$t_1 + \tau_0$	247 s

Celkové zpoždění v intervalech B_1' a B_2' vyšlo

$$
\begin{aligned}
\varphi_{B_1'} &= \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2}{2T}\,,\\
\varphi_{B_2'} &= \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(3T - t_1 - \tau_0)^2}{2T}\,.
\end{aligned}
$$

Pro druhou část intervalu B máme

$$
\begin{aligned}
\varphi_{B_1''} &= \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} && = \frac{(T - t_2)^2 + (T - t_1)^2}{2T}\,,\\
\varphi_{B_2''} &= \frac{(t_b + t_c + t_d)^2 - 2t_b t_d}{2T} && = \frac{(\tau_0 - t_2)^2 - 2\,(t_1 - t_2 + \tau_0 - T)\,(\tau_0 - T)}{2T}\,.
\end{aligned}
$$

Nakonec, v posledním intervalu, který teoreticky pokračuje až do nekonečna, platí

$$
\begin{aligned}
\varphi_{C_1} &= \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} && = \frac{(T - t_2)^2}{2T}\,,\\
\varphi_{C_2} &= \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} && = \frac{(2T - t_1 - \tau_0)^2}{2T}\,,\\
\varphi_{C_3} &= \frac{(t_a + t_b + t_d)^2 + 2t_bT + 2t_cT - t_c^2}{2T} && = \frac{3T - 2t_1 - 2\tau_0}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Tab. 4: Délky časových úseků, pro které dokážeme přímočaře spočítat zpoždění.

	t_a	t_b	t_c	t_d
A_1	$2T + t_2 - \tau_0$	$T - t_2$	$t_1 - 3T + \tau_0$	$T - t_1$
A_2	$2T + t_2 - \tau_0$	$t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T$	$3T - t_1 - \tau_0$	$\tau_0 - 2T$
B_1'	$2T - \tau_0$	t_2	$t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T$	$T - t_1$
B_2'	$2T - \tau_0$	$t_1 + \tau_0 - 2T$	$2T - \tau_0 - t_1 + t_2$	$\tau_0 - t_2 - T$
B_1''	$T + t_2 - \tau_0$	$T - t_2$	$t_1 + \tau_0 - 2T$	$T - t_1$
B_2''	$T + t_2 - \tau_0$	$t_1 - t_2 + \tau_0 - T$	$2T - \tau_0 - t_1$	$\tau_0 - T$
C_1	$T - \tau_0$	t_2	$t_1 - t_2 + \tau_0 - T$	$T - t_1$
C_2	$T - \tau_0$	$t_1 + \tau_0 - T$	$T - \tau_0 - t_1 + t_2$	$\tau_0 - t_2$
C_3	t_1	$T - t_1 - \tau_0$	t_2	$\tau_0 - t_2$

Tab. 5: Průměrné zpoždění na časových úsecích z tabulky 4.

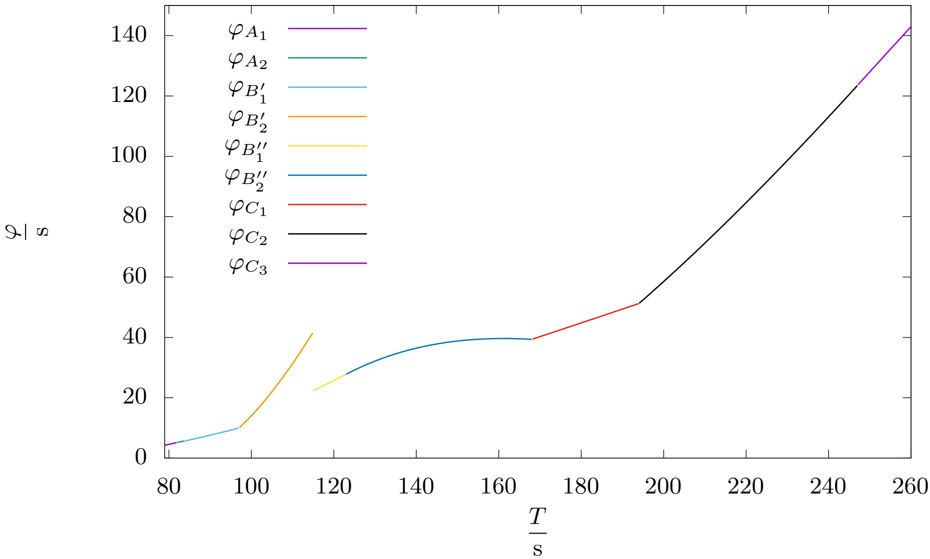
	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d
A_1	0	$t_b/2$	0	$t_d/2$
A_2	0	$t_b/2 + t_c$	$t_c/2 + t_d$	$t_d/2$
B_1'	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
B_2'	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
B_1''	0	$t_b/2$	0	$t_d/2$
B_2''	0	$t_b/2 + t_c$	$t_c/2 + t_d$	$t_d/2$
C_1	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
C_2	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
C_3	$t_a/2 + t_b$	$T + t_b/2$	$T - t_c/2$	$t_d/2 + t_a + t_b$

Hledanou dobu průjezdu semafory získáme snadno tak, že ke zpoždění přičteme hodnotu τ_0.

Všimněme si, že poslední funkce je přímka v proměnné T. Všechny ostatní jsou nějakou kombinací přímky a hyperboly. Dále, čas φ_b z posledního úseku je zajímavý tím, že je jako jediný větší než T. V tu chvíli tak máme jedinečnou příležitost čekat na semaforech déle než celou jednu periodu.

Poslední zajímavost je vidět z grafu na obrázku 3, kam jsme vynesli všechna předchozí zpoždění. Mezi intervaly B_2' a B_1'' je zřetelný skok. To znamená, že průměrná doba průjezdu přes oba semafory může být kratší při celkově delší době trvání červené.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`



Obr. 3: Výsledné zpoždění při průjezdu semafory pro všechny možné hodnoty periody T.