

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

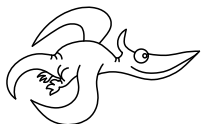
předposlední série tohoto ročníku je tu! Těšit se můžete opět na zajímavé úlohy. Pták FYKOSák odpálí baseballový míček, zkolonizujeme Mars či necháme obíhat stelit kolem Země.

Mimo valnou část sérií je za námi také Fyziklání, které se letos poprvé konalo v PVA EXPO Praha! Absolutním vítězem se stal tým z Rumunska - The Kaldashians, gratulujeme!

Blíží se jaro a s ním také jarní soustředění, které se uskuteční koncem dubna. Pokud tentokrát nedostaneš pozvánku, nezoufej! Řeš a zvyš si šance na účast na podzimním!

Budeme se těšit!

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 29. 3. 2022 23.59

Termín odeslání: 28. 3. 2022

Úloha V.1 ... ozářená družice

3 body

Průměrně jakou část dne stráví ve stínu Země satelit obíhající na nízké oběžné dráze? Uvažujte, že obíhá po kruhové dráze v rovině ekliptiky ve výšce $H = R/10$ nad povrchem, kde R je střední poloměr Země.

Úloha V.2 ... pecka z třešně

3 body

Elon Musk plánuje kolonizaci Marsu. Aby se to mohlo stát skutečností, musí tomu předcházet výstavba zásobovacích základen na povrchu Měsíce. Pomozte vyřešit zásadní otázku: jak daleko doletí pecka z třešně, kterou 180 cm vysoký člověk na základně na Měsíci plivne vodorovným směrem? Na Zemi by tato pecka dopadla do vzdálenosti 4,3 m.

Bonus Určete poměr vzdáleností, do kterých tentýž člověk doplivne pecku na Zemi a na Měsíci pod libovolným úhlem vzhledem k vodorovné rovině.

Úloha V.3 ... pod pokličkou

6 bodů

Poklička tvaru dutého válce s kruhovým průřezem o poloměru 6,00 cm leží ve vodorovném umyvadle. Pod ní se nachází vzduch o atmosférickém tlaku 1013 hPa. Při umývání nádobí začneme do umyvadla napouštět vodu o pokojové teplotě. Ta se dostává i pod pokličku a stlačuje tak pod ní uzavřený vzduch. V jistém okamžiku začne poklička plavat. Jak vysoko bude v té chvíli hladina vody? Poklička váží 200 g, má výšku 2,00 cm a její objem můžete zanedbat.

Úloha V.4 ... odpal

7 bodů

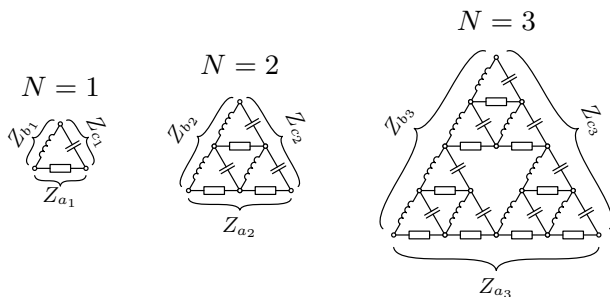
Pták Fykosák odpaloval baseballový míč o hmotnosti m pálkou ve tvaru homogenní tyče s délkovou hustotou λ . Předpokládejme, že tyč je upevněna na jednom svém konci, přičemž se okolo tohoto bodu může otáčet. Fykosák na ni může působit buď konstantním momentem síly M , nebo ji může roztáčet s konstantním výkonem P . Po otočení o úhel $\varphi_0 = 180^\circ$ narazí konec

tyče do dosud nehybného míče a dojde k pružné srážce. Při jaké délce tyče l získá míč největší rychlost? Porovnejte obě situace (tj. konstantní M proti konstantnímu P).

Úloha V.5 ... střídavý trojúhelník

8 bodů

Postavíme si konečný Sierpiňského trojúhelník stupně N (tedy pro $N = 1$ to bude jen trojúhelník, pro $N = 2$ to budou už čtyři trojúhelníky atd.). Na spodních stranách budou vždy rezistory o odporu $R = 150 \Omega$, na levých stranách cívky o indukčnosti $L = 0,4 \text{ H}$ a na zbylých stranách kondenzátory s kapacitou $C = 20 \mu\text{F}$. Mezi levým a pravým dolním rohem trojúhelníku měříme impedanci. Úhlová frekvence zdroje je $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$. Najděte rekurentní vztahy, které tuto impedanci vyčíslí, a určete její hodnotu pro $N = 7$. Nalezněte rekurentní vztah pro situaci, kdybychom cívky a kondenzátory nahradili odpory R a vyčíslíte ji pro $N = 15$.



Obr. 1: Schéma obvodu.

Úloha V.P ... teplý asteroid

10 bodů

Vymyslete co nejvíce fyzikálních důvodů, proč by asteroid mohl mít vyšší teplotu než okolí.

Úloha V.E ... už to fičí

13 bodů

Změrte moment setrvačnosti válce (vůči jeho hlavní ose) a koule (vůči ose procházející jejím středem) tím, že je budete pouštět z nakloněné roviny.

Úloha V.S ... stabilizujeme

10 bodů

- Jakou intenzitu musí mít laser o vlnové délce 351 nm , aby prostřednictvím ablace povrchu palivové peletky stabilizoval Rayleighovu-Taylorovu (RT) nestabilitu? Předpokládejte, že rozhraní ablatoru s DT ledem je vlnité s vlnovou délkou
 - $0,2 \mu\text{m}$,
 - $5 \mu\text{m}$.
- Jak se změní intenzita laseru, pokud na peletku aplikujeme ještě magnetické pole o velikosti 5 T ?
- Co dalšího může napomoci minimalizovat RT nestabilitu?



Řešení III. série

Úloha III.E ... až moc sladký čaj

12 bodů; průměr 9,57; řešilo 40 studentů

Změrte stáčení polarizační roviny v závislosti na koncentraci cukru v roztoku.

Káta nemá ráda slazený čaj.

Teorie

Světlo je součástí spektra elektromagnetického vlnění, které se skládá ze dvou na sebe kolmých složek – elektrického a magnetického pole. Ty jsou zároveň kolmé na směr šíření světla. Pro naše účely se zaměříme pouze na vektor elektrického pole. Pokud bychom sledovali paprsek světla vycházející ze zářivky nebo Slunce, zjistili bychom, že vektor el. pole zabírá libovolný směr kolmý na šíření záření. O takovém záření řekneme, že je nepolarizované, neboli že nemá preferovaný směr, ve kterém probíhají oscilace elektrického pole. Oproti tomu polarizované světlo má pouze jeden přesně udaný směr, ve kterém může elektrická část světla kmitat.

Získat polarizované světlo můžeme získat dvěma způsoby, buď zpolarizujeme nepolarizované světlo nebo použijeme zdroj polarizovaného světla. K polarizaci světla použijeme polarizační fólii, která byla řešitelům zaslána poštou. Polarizační fólie má tu vlastnost, že propuští pouze tu část záření, jejíž směr kmitání odpovídá směru polarizační roviny fólie. Pokud na polarizační fólii posvítíme světlem polarizovaným kolmo na směru polarizační roviny fólie, žádné světlo neprojde. Zdrojem monochromatického polarizovaného světla jsou pak např. lasery nebo většina LCD obrazovek.

Opticky aktivní látky umí stáčet rovinu polarizovaného světla, a to buď v kladném, či záporném směru. Úhel stočení je určen následujícím vztahem

$$\alpha = cl [\alpha] ,$$

kde l je dráha světla v roztoku, c je koncentrace chirální látky¹ s jednotkami $\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}$ a $[\alpha]$ je specifická rotace rozpuštěné látky.

Jednotkou specifické rotace je $[[\alpha]] = ^\circ\text{dm}^{-1}\cdot\text{ml}\cdot\text{g}^{-1}$. Jedná se o poměrně nezvyklou jednotku, jelikož žádné její složky nejsou uvedeny v základním tvaru. Důvodem je fakt, že se jedná o veličinu používanou hlavně v chemických oborech, kde se tyto konvence nedodržují a používají se jednotky, které jsou praktičtější pro experiment.

Měření

Základem našeho měření je laser, který by měl teoreticky vydávat již polarizované světlo o vlnové délce (638 ± 5) nm. Jelikož se nejedná o laser laboratorní kvality, můžeme očekávat, že záření, které vydává, bude pouze částečně polarizované, což napravíme vložením polarizační fólie mezi laser a kádinku. Světlo z laseru necháme dopadat kolmo na stěnu kádinky o objemu 1 l. V ní budeme připravovat vodný roztok sacharózy. Světlo dále prochází skrz druhou polarizační fólii a dopadá na terčík, kde měříme stočení úhlu polarizace. Při otáčení druhé polarizační fólii

¹Stručně řečeno, chirální látky jsou ty látky, jejichž molekuly nejsou zrcadlově symetrické. Právě toto porušení symetrie má za důsledek stáčení polarizace světla procházejícího takovouto látkou nebo jejím roztokem.

hledáme úhel, při kterém světlo kompletně nebo alespoň co nejvíce vymizí. Světlo v roztoku urazí vzdálenost 1 dm.

Jako první provedeme měření pouze s čistou vodou; začínáme s objemem $V_0 = 500$ ml a změříme rovinu polarizace polarizační fólie, neboli úhel, oproti kterému budeme odčítat další měření. Následně přidáme cukr o hmotnosti $m_c = 25$ g. Tím se hladina zvedne, ale jelikož laser vstupuje do kádinky horizontálně, nemění se vzdálenost, kterou paprsek musí projít. Změnu objemu a tedy i koncentrace roztoku nelze spočítat jako součet původního objemu a objemu přidaného krystalického cukru, vztah je složitější. Budeme tedy přímo měřit i změnu objemu po přidání cukru.

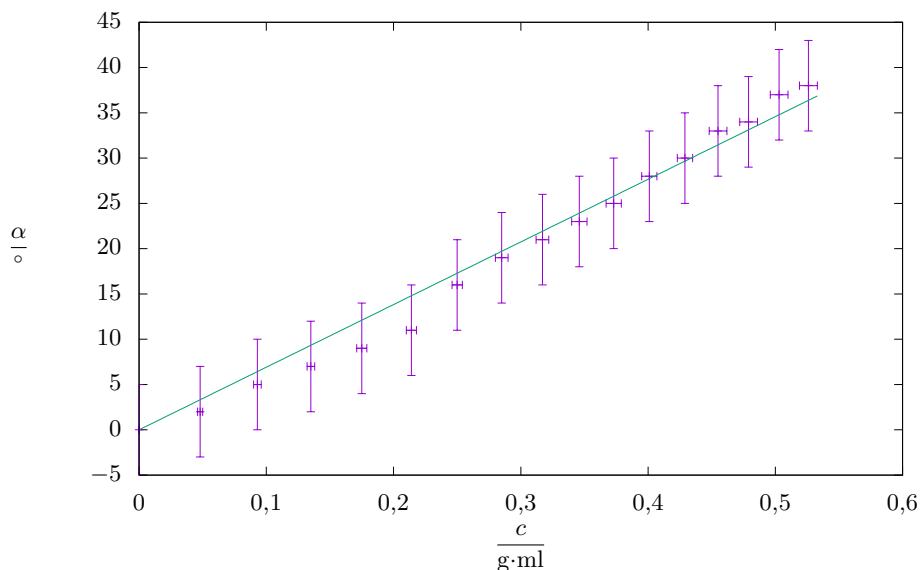
Po přidání cukru je potřeba směs dostatečně promíchat, aby se všechno rozpustil. Následně znovu změříme rovinu polarizace na terčíku pomocí polarizační fólie. Tento proces zopakujeme celkem 16krát, tudíž výsledná hmotnost cukru v roztoku je 400 g. Nyní odečteme úhel ze všech 16 měření. To můžeme udělat ručně pomocí úhloměru nebo můžeme terčík naskenovat a změřit pomocí libovolného programu (např. GIMP 2). Určíme hodnotu, vůči které budeme výsledky odčítat, tedy buď vůči 1. měření (čistá voda) nebo vůči společné přímce (např. GIMP 2 měří nejbližší úhel vůči vodorovné nebo svislé čáře). My si zvolíme měření pomocí programu GIMP 2. Úhel budeme měřit s přesností na jednotky stupňů.

Naměřená data jsou vyznačena v tabulce 1.

Tab. 1: Tabulka naměřených hodnot

$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{c}{\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}}$	$\frac{\sigma_c}{\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}}$	$\frac{\alpha_0}{^\circ}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
0	500	0,000	0,000	68	0
25	520	0,048	0,002	65	2
50	540	0,093	0,003	63	5
75	560	0,135	0,003	61	7
100	570	0,175	0,004	59	9
125	590	0,214	0,004	56	11
150	600	0,250	0,005	52	16
175	620	0,285	0,005	49	19
200	630	0,317	0,005	46	21
225	650	0,346	0,006	44	23
250	670	0,373	0,006	42	25
275	690	0,401	0,006	39	28
300	700	0,429	0,006	37	30
325	720	0,455	0,007	35	33
350	730	0,479	0,007	33	34
375	750	0,503	0,007	31	37
400	760	0,526	0,007	29	38

kde m je hmotnost rozpuštěného cukru, V je celkový objem roztoku, c je vypočítaná koncentrace cukru a σ_c je absolutní odchylka koncentrace c . Hodnota α_0 označuje úhel, ve kterém jsme pozorovali minimální intezitu světla. Abychom zjistili o kolik stupňů se v každém měření stočila rovina polarizace (v tabulce α), odečteme od každého měření hodnotu naměřenou v prvním měření (tedy zjistíme jak se změnila rovina polarizace oproti měření s čistou vodou.).

Obr. 2: Závislost stočení polarizační roviny α na koncentraci c .

Rovina polarizace se stáčela proti směru hodinových ručiček, tedy fyzikálně řečeno v kladném směru. Úhel stáčení rostl s narůstající koncentrací.

Podle teorie by úhel, o který se rovina polarizace stočí, měl být přímo úměrný koncentraci chirální látky. Naměřená data tedy budeme prokládat funkcí $\alpha(c) = kc$, kde parametr k odpovídá konstantě úměrnosti, tedy $k = l[\alpha]$. Získáme takto hodnotu $k = (75 \pm 2)^\circ \text{ ml} \cdot \text{g}^{-1}$. Naměřená hodnota specifické rotace tedy bude $[\alpha] = (75 \pm 2)^\circ \text{ dm}^{-1} \cdot \text{ml} \cdot \text{g}^{-1}$, protože délka dráhy paprsku v roztoku byla $l = 1 \text{ dm}$.

Chyby měření

Pro výpočet nejistoty měření koncentrace jsme využili přenosu chyb u dělení. Výsledná nejistota tudíž bude

$$\frac{\sigma_c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2},$$

kde $\sigma_m = 1 \text{ g}$ a $\sigma_V = 15 \text{ ml}$ odpovídají rozlišovací schopnosti použitých nástrojů. Pro chybu měření stočení roviny polarizace použijeme hodnotu $\sigma_\alpha = 5^\circ$. Úhloměr je sice schopen větší přesnosti, ale je třeba zohlednit i kvalitu polarizační fólie a faktu, že lidské oko, kterým pozorujeme intenzitu světla na terčičku, má pro naše účely velmi nízkou přesnost.

Diskuze

V průběhu experimentu je důležité, aby se jednotlivé části soustavy vůči sobě neposunuly. To by způsobilo systematickou chybu měření. Hlavním zdrojem nejistoty měření bylo určování

okamžiku, kdy bylo polarizátorem blokováno nejvíce světla. To je způsobeno omezenou citlivostí lidského oka vůči malým rozdílům intenzity světla. Použitím detektoru světla nebo obyčejné fotodiody bychom odstranili systematickou při měření, čímž bychom získali přesnější výsledky. Poté do experimentu vstupují nepřesnosti způsobené měřicími přístroji – váhou a odměrným válcem.

Na internetu² lze dohledat optickou chiralitu sacharózy $[\alpha]_D^{20} = 66^\circ \text{dm}^{-1} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ pro teplotu 20°C a světlo vydávané sodíkovou výbojkou, tedy pro vlnovou délku 589 nm . Experiment probíhal za přibližně stejné teploty, ale použili jsme světlo o jiné vlnové délce, což také mohlo ovlivnit výsledek experimentu.

Závěr

V experimentu se nám podařilo ověřit, že mezi stočením polarizační roviny a koncentrací roztoku platí přibližně přímá úměra.

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@fykos.cz

Úloha III.S ... hoříme

10 bodů; průměr 2,45; řešilo 11 studentů

1. Určete (s pomocí obrázku 3) dosah jader helia v centrální horké skvrně.
2. Jaká energie se musí uvolnit fúzními reakcemi, aby se hoření paliva rozšířilo do nejbližší slupky peletky? Jak tlustá je tato slupka?
3. Odhadněte, jaká je nejpravděpodobnější přenesená energie z jádra helia na deuterium. Kolik srážek průměrně podstoupí jádro helia v centrální horké skvrně předtím, než se zastaví?

Dosah jader hélia

Z prvního dílu seriálu vieme, že pri DT reakci si ^4He odnesie energiu $E = 3,541 \text{ MeV}$, čomu v grafe 3 odpovedá³ $R = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$. Pre dosah l alfa platí

$$l = \frac{R}{\rho} = 0,08 \mu\text{m},$$

kde z druhého dílu seriálu vieme, že hustota po stlačení je približne $\rho = 100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Prehorenie paliva do najbližšej šupky

V druhej časti vyjdeme zo vzťahu

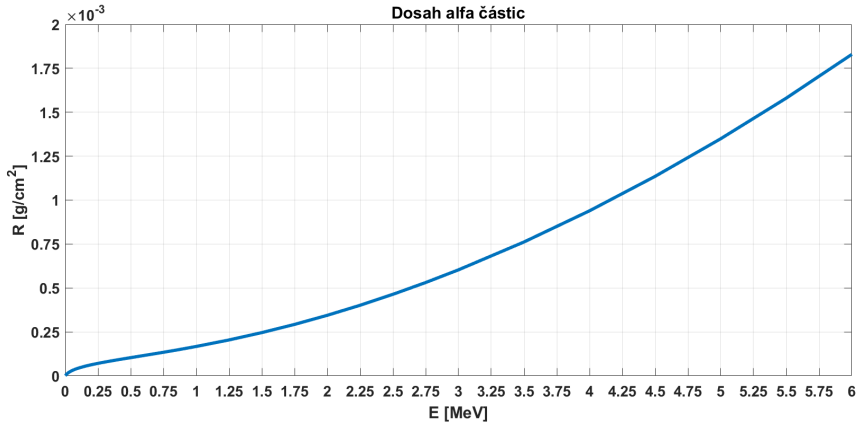
$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

pričom za q dosadíme známe

$$q = \frac{Q}{tS},$$

²<https://en.wikipedia.org/wiki/Sucrose>

³Pozor na 10^{-3} nad osou y grafu.



Obr. 3: Závislost tzv. dosahu jader helia v deuteriu na jejich energii. Dosah je obvykle normován na hustotu daného materiálu udávanou v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, proto je jeho jednotka udávána v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.

kde t je doba prenosu energie a S je plocha, cez ktorú tok energie prebieha. V našom prípade sa jedná o povrch gule s polomerom r a Q je energia prúdiaca cez túto plochu. Nás zaujíma iba celkové množstvo energie, záporné znamienko tým pádom môžeme vypustiť, po dosadení dostávame

$$\frac{Q}{4\pi r^2 t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Pri výpočte energie Q vyjdeme z toho, že horí centrálna horúca škvrna, o polomere $r = 1 \mu\text{m}$. Pri jednej fúznej reakcii sa uvoľní $Q_1 = 3,54 \text{ MeV}^4$. Počet reakcií v objeme $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, za predpokladu, že všetky reakcie prebehnú, je rovný počtu atómov n_D resp. n_T . Keďže sa počty atómov rovnajú použijeme označenie iba $n = n_D = n_T$. Táto škvrna má hmotnosť

$$m_0 = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

kde $\rho = 100 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Označme postupne 1m_D a 1m_T ako hmotnosť jednotlivých atómov, hmotnosť reakčných produktov k jednej reakcii je ${}^1m_0 = {}^1m_D + {}^1m_T$. Pre počet reakcií platí

$$n = \frac{m_0}{{}^1m_0} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho}{{}^1m_D + {}^1m_T}.$$

Po dosadení dostávame celkový počet reakcií $n = 5 \cdot 10^{13}$ a celkovú uvoľnenú energiu z objemu $Q = nQ_1 = 17,7 \cdot 10^{10} \text{ GeV} = 28,35 \text{ J}$.

Celá reakcia trvá približne $t = 200 \text{ ps}$, avšak tento čas je čas potrebný na prehorenie celej paletky, čas samotného horenia vrstvy je v rádoch jednotiek ps, uvažujme $t = 1 \text{ ps}$. Na zapálenie

⁴Počítame len energiu ${}^4\text{He}$, pretože n vyletia z horúcej škvryny bez interakcie.

reakcie, ako už vieme, potrebujeme teplotu $T = 5 \text{ keV} - 10 \text{ keV}$. Posledným neznámym ostáva parameter κ , ten je dohľadateľný na internete

$$\kappa = \frac{AT^{\frac{5}{2}}}{\ln \Lambda},$$

pričom $\ln \Lambda$ sa nazýva Coulombický logaritmus, ktorý nadobúda hodnôt medzi 5 a 15, my ho položíme rovný 10^5 , T je teplota v keV, A je konštanta rovná $A = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-\frac{7}{2}}$ a dosadením

$$\kappa = \frac{9,5 \cdot 10^{12} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-\frac{7}{2}} \cdot (10 \text{ keV})^{\frac{5}{2}}}{10} \doteq 3 \cdot 10^{14} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-1}.$$

Ak uvažujeme $T = 10 \text{ keV}$, dostávame

$$\Delta x = \kappa \frac{4\pi r^2 t \Delta T}{Q} = 3 \cdot 10^{14} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-1} \cdot 4\pi \cdot (1 \cdot 10^{-4} \text{ cm})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-12} \text{ s} \cdot 10 \text{ keV} \cdot \frac{1}{28,35 \text{ J}}.$$

Po vyčíslení dostávame, že šupka, do ktorej palivo prehorí, je hrubá približne $1,30 \mu\text{m}$.

Prenos energie z jadra ${}^4\text{He}$ na D

V tretej časti je potrebné uvedomiť si, že parameter b je závislý na hustote častíc ξ , pričom $b = \sqrt[3]{\xi^{-1}}$. Hustotu častíc ξ vieme vypočítať z predchádzajúcej časti ako

$$\xi = \frac{n}{V},$$

pričom n je, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, celkový počet častíc, a V je objem centrálnej škvry. Po dosadení z predchádzajúcej časti

$$\xi = \frac{V\rho}{V^1 m_0} = \frac{\rho}{1 m_0},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1 m_0}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8,35 \cdot 10^{-24} \text{ g}}{1 \cdot 10^8 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}}} \doteq 4,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Náletový uhol spočítame ako

$$\frac{\theta}{2} = \cotg^{-1} \left(\frac{8\pi\varepsilon_0 E_k b}{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}}{8\pi\varepsilon_0 E_k b} \right).$$

Pre jednoduchosť zavedme B a vyčíslíme

$$B = \frac{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}}{8\pi\varepsilon_0 E_k b} = \frac{2 \text{ e} \cdot 1 \text{ e}}{8 \cdot \pi \cdot 55,26 \text{ e}^2 \cdot \text{GeV}^{-1} \cdot \text{fm}^{-1} \cdot 3,54 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} \cdot 4,3 \cdot 10^4 \text{ fm}} \doteq 9,465 \cdot 10^{-6},$$

po dosadení do rovnice pre prenos energie dostávame

$$Q = 2 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} v_{\text{He}}^2 \sin^2(\text{tg}^{-1} B),$$

pričom zo známeho vzorca vieme, že

$$\sin(\text{tg}^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb_collision

Vztah upravíme na

$$Q = 2 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} v_{\text{He}}^2 \left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}} \right)^2,$$

kde v spočítáme z $E = \frac{1}{2}mv^2$,

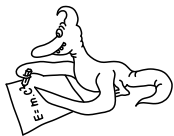
$$\begin{aligned} Q &= 4 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} \frac{E_{4\text{He}}}{m_{\text{He}}} \left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}} \right)^2 = 4E_{4\text{He}} \frac{(m_{\text{H}}m_{\text{He}})^2}{m_{\text{H}}m_{\text{He}}(m_{\text{H}} + m_{\text{He}})^2} \frac{B^2}{B^2 + 1} = \\ &= 4E_{4\text{He}} \frac{(m_{\text{H}}m_{\text{He}})}{(m_{\text{H}} + m_{4\text{He}})^2} \frac{B^2}{B^2 + 1} = 5,7 \cdot 10^{-11} E_{4\text{He}} \doteq 214 \mu\text{eV}. \end{aligned}$$

Ak vychádzame z predpokladu, že pri každej zrážke sa stratí rovnako veľa energie, potrebujeme $(13,4 \cdot 10^{-12})^{-1} = 18 \cdot 10^9$ zrážok. Ak však predpokladáme, že strata energie je postupná, výsledná energia po i -tej zrážke je $E_i = (1 - 5,7 \cdot 10^{-11})^i E$. Ak si napr. stanovíme limit 10 % počiatočnej energie a ľahko si dopočítame počet zrážok

$$\begin{aligned} 0,1E &= (1 - 5,7 \cdot 10^{-11})^i E, \\ \frac{\log_{10}(0,1)}{\log_{10}(1 - 5,7 \cdot 10^{-11})} &= i, \\ i &= 4 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

Vidíme, že ${}^4\text{He}$, resp. alfa častice neprenesú skoro žiadnu energiu na D, resp. T. Naskytuje sa otázka, ako sa energia prenáša do ďalších vrstiev, resp. ako sa horenie paliva rozširuje. Vysvetlením je, že alfa častice prenášajú svoju energiu na elektróny a tie naspäť na D a T a tým dochádza k prenosu energie.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... planetově závislé jednotky 3 body; průměr 2,09; řešilo 66 studentů

Mnoho jednotek na Zemi je historicky svázáno s vlastnostmi naší planety. Jaké by byly jednotky jako metr, uzel či atmosféra, kdybychom je zavedli stejným způsobem, jako byly původně zavedeny na Zemi, ale přitom bychom bydleli na Marsu? Uveďte jak poměry mezi „zemskými“ a „marťanskými“ jednotkami, tak i jejich vyjádření pomocí jednotek SI.

Karel se zamýšlel nad ne-SI jednotkami.

Metr

První oficiální definice metru pochází z roku 1793 jako jedna desetimiliontina vzdálenosti rovníku a severního pólu. Pokud uvažujeme Mars jako kouli o poloměru $r_M = 3\,386$ km, tak je tato vzdálenost rovna čtvrtině jeho obvodu, přibližně tedy 5 319 km. Desetimiliontina této vzdálenosti činí přibližně polovinu metru. Podle původní definice by byl tedy „marťanský“ metr přibližně poloviční než ten původní „zemský“

$$\frac{l_M}{l_Z} = \frac{R_M}{R_Z} \doteq 0,53.$$

Pro zajímavost, pokud bychom Mars uvažovali jako rotační elipsoid, došli bychom k úplně stejnému výsledku.

Metr byl také definován jako délka závěsu sekundového kyvadla. Toto kyvadlo má periodu dvě sekundy. Vyjdeme-li z učebnicového vztahu pro periodu matematického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

můžeme poměr délek závěsů sekundových kyvadel na Marsu a Zemi vyjádřit jako podíl tabulkových hodnot tíhových zrychlení při jejich povrchu

$$\frac{l_M}{l_Z} = \frac{g_M}{g_Z} \doteq \frac{3,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 0,38.$$

Podle této definice je „marťanský“ metr ještě kratší, než ten určený z předchozí definice. Předpokládali jsme ale, že délka sekundy na Marsu a na Zemi je stejná. Pokud si ale Marťané (stejně jako lidé) stanoví délku sekundy na

$$1 \text{ s} = \frac{1}{86\,400} \text{ d},$$

pak je tato doba jiná, neboť Mars má rotační periodu $P = 1,026$ d. Po této úvaze definujeme „marťanský“ metr jako

$$l_M = l_Z \frac{g_M}{g_Z} \left(\frac{P_M}{P_Z} \right)^2 \doteq 0,38 \text{ m} \cdot 1,026^2 \doteq 0,40 \text{ m}.$$

Standardní atmosféra

Standardní atmosféra byla definována jako tlak vyvolaný sloupcem rtuti vysokým 760 mm při teplotě 0°C. Poměr velikosti této jednotky na Marsu a Zemi se dá vyjádřit jako

$$\frac{p_M}{p_Z} = \frac{h\rho g_M}{h\rho g_Z} = \frac{g_M}{g_n} \doteq 0,38,$$

kde $g_n = 9,807 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je standardní tíhové zrychlení pro Zemi, $g_M = 3,725 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tabulková hodnota tíhového zrychlení na Marsu, ρ je hustota rtuti a $h = 760 \text{ mm}$ je definicí stanovená výška sloupce. Tedy číselně $p_M \doteq 385 \text{ hPa}$. Opět však narazíme na jisté problémy - při průměrné povrchové teplotě Marsu je rtuť v pevném skupenství, takže její vlastnosti nejsou shodné s vlastnostmi rtuti v pozemském barometru. Otázkou je také, zda bychom neměli ve výpočtu uvažovat i výše uvedenou změnu délky, jelikož milimetr na Zemi a Marsu se podle předchozích úvah liší.

Situaci si však můžeme zjednodušit, pokud budeme atmosféru definovat jako průměrný atmosférický tlak na povrchu. V tomto případě platí

$$p_M \doteq 610 \text{ Pa} = 0,0060 \text{ atm}.$$

Uzel

Definice uzlu byla navržena tak, aby rychlost v uzlech byla rovna počtu obloukových minut zeměpisné šířky, které loď ujela za hodinu při jízdě v poledníkovém směru. Rychlost lodi v uzlech na Zemi a Marsu bude stejná, pokud jejich úhlové rychlosti budou stejné. Pak se ale ураžené vzdálenosti za jednotku času budou lišit. Např. loď plující rychlostí deset uzlů za hodinu urazí na Zemi během hodiny přibližně 18,6 km, zatímco loď plující stejnou rychlostí na Marsu urazí za stejný čas pouze asi 9,9 km (v pozemských kilometrech). Poměr rychlostí v $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ lodí se stejnou rychlostí v uzlech na Marsu a Zemi je dán poměrem jejich poloměrů jako

$$\frac{v_M}{v_Z} = \frac{R_M}{R_Z} \doteq 0,53.$$

Na situaci můžeme nahlížet i následovně. Definice uzlu v principu definuje jednotku úhlové rychlosti pohybu po povrchu $\omega_0 = 1' \text{ h}^{-1}$. Pokud bychom uvažovali navíc i změnu rotační periody, můžeme si uvědomit, že letadlo s rychlostí 1 uzel obletí planetu za $t = 360 \cdot 60 \text{ h} = 900P$. Z toho už lehce určíme poměr skutečných rychlostí jako

$$\frac{v_M}{v_Z} = \frac{\frac{2\pi R_M}{900P_M}}{\frac{2\pi R_Z}{900P_Z}} = \frac{R_M P_Z}{R_Z P_M} \doteq 0,52.$$

Josef Trojan
josef.trojan@fykos.cz

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha IV.2 ... rychlodráha

3 body; průměr 2,18; řešilo 57 studentů

Matfyz kromě návrhu vlastního piva plánuje postavit i zábavní park. Postaví tam speciální fyzikální bobovou dráhu, na které boby začínají s nějakou nenulovou vertikální rychlostí v_y a rozjíždí se svisle dolů. Dráha se postupně zakřivuje víc a víc do vodorovného směru, přičemž svislá složka rychlosti zůstává konstantní.

Jakou mají boby rychlost ve vodorovném směru v závislosti na výšce, o kterou klesly, a jakou mají celkovou rychlost v závislosti na čase? Boby po dráze jezdí bez tření.

Bonus Jaký je tvar bobové dráhy?

Karel měl „světlou“ chvíli.

Máme danou vertikální rychlost v_y , která má být konstantní. Poloha ve směru y , pokud ji začneme počítat od místa, kde byl bob vypuštěn, přičemž směrem dolů bude kladná, poroste jako $y = v_y t$. Protože máme zanedbat odporové síly, musí platit zákon zachování mechanické energie, neboli

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + \frac{1}{2}mv_y^2,$$

kde v je celková rychlost bobu ve výšce y , resp. v čase t , a m je hmotnost bobu. Tou ovšem můžeme celou rovnici vydělit a nebudeme ji tedy potřebovat. Vidíme, že celková kinetická energie je počáteční kinetická a přírůstek způsobený poklesem bobu. Pokud rychlost ve směru x označíme jako v_x , pak platí

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gy + v_y^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{2gy}.$$

Tím jsme dostali odpověď na první otázku, horizontální rychlost je $v_x = \sqrt{2gy}$. Pokud do zákona zachování energie dosadíme časovou závislost y , získáme vztah pro rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgv_y t + \frac{1}{2}mv_y^2 \Rightarrow v^2 = 2gv_y t + v_y^2 \Rightarrow v = v_y \sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}.$$

Odpovědí na druhou otázku je, že celková rychlost bobu se v čase vyvíjí jako $v = v_y \sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}$.

Bonus

Dráhu si vyjádříme parametricky. Od počátku víme, že platí $y = v_y t$. Co platí pro x ? To zjistíme tak, že nalezneme v_x v závislosti na čase a zintegrujeme jej.

$$v_x = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gv_y t} \Rightarrow x = \int_0^t v_x(\tau) d\tau = \int_0^t \sqrt{2gv_y \tau} d\tau = \frac{1}{3} \sqrt{8gv_y t^3}.$$

Získali jsme tak parametrické vyjádření. Ještě můžeme najít závislost $y(x)$, pokud vyjádříme t z jedné rovnice a do druhé dosadíme. Potom nám vyjde $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9x^2 v_y^2}{g}}$. Z výsledků je patrné, že tvar dráhy bude záviset i na rychlosti, se kterou budeme chtít bob vypouštět.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha IV.3 ... kyvadlové nárazy

5 bodů; průměr 3,15; řešilo 52 studentů

Dvě malé kuličky jsou upevněny na koncích provázků stejné délky ($l = 42,0$ cm) a zanedbatelné hmotnosti. Opačné konce obou provázků jsou uchyceny v totéž bodě. Kuličky mají stejnou velikost, liší se však materiálem, z něhož jsou vyrobeny. Jedna je ocelová ($\rho_1 = 7840$ kg·m⁻³) a druhá duralová ($\rho_2 = 2800$ kg·m⁻³). Obě závaží pustíme z klidu s počáteční výchylkou 5°, poté dojde k dokonale pružné srážce. Do jaké maximální výšky po ní jednotlivé kuličky vystoupí? Jak to dopadne po druhé srážce? Karel chtěl ostatní hypnotizovat. Chce se vám řešit úlohu ...

Pre jednoduchosť si zvolíme hladinu nulovej potenciálnej energie v mieste zrážky. Poznáme dĺžku lana l a uhol $\alpha_0 = 5^\circ$, vďaka ktorým vieme, že počiatočná výška oboch závaží je

$$h_0 = l(1 - \cos \alpha_0) = 1,60 \text{ mm}.$$

Podľa zákona zachovania mechanickej energie (ďalej len ZZE) môžeme písať pre prvé závažie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= m_1 g h_0, \\ v_1 &= \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}. \end{aligned}$$

Keďže je druhé závažie vychýlené pod rovnakým uhlom a jeho lano má rovnakú dĺžku, tak platí $v_2 = -v_1$. Aby sme zistili rýchlosť závaží po náraze použijeme ZZE a zákon zachovania hybnosti (ďalej len ZZH)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2'. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc a dosadením za m_1 , m_2 , v_1 , v_2 a h_0 získame

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}, \\ v_2' &= \frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}. \end{aligned}$$

Teraz vieme späťne vypočítať do akej výšky h_1' a h_2' vystúpia jednotlivé závažia podľa ZZE

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 &= m_1 g h_1' \quad \Rightarrow \quad h_1' = \frac{v_1'^2}{2g}, \\ h_1' &= \left(\frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 l(1 - \cos \alpha_0) \doteq 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \end{aligned}$$

Rovnaký postup je aj pri druhom závaží

$$h_2' = \left(\frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 l(1 - \cos \alpha_0) \doteq 6,06 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

Vidíme teda, že ľahšie duralové závažie bude „vystrelené“ výrazne vyššie, zatiaľ čo pohyb ocelového závažia bude len ťažko pozorovateľný.

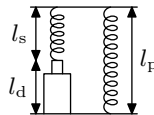
Riešime matematické kyvadlo, a preto platí, že druhá zrážka nastane na rovnakom mieste ako prvá. Podľa ZZE budú mať závažia rovnaké rýchlosti pred druhou zrážkou ako mali po prvej zrážke. Riešime opäť tú istú sústavu rovníc, preto budú mať závažia po druhej zrážke rýchlosti rovnaké ako mali pred prvou zrážkou, a teda vystúpajú do pôvodnej výšky.

Po prvej zrážke vystúpajú závažia do výšok $h_1' \doteq 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ a $h_2' \doteq 6,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, po druhej zrážke vystúpajú naspäť do pôvodnej výšky.

Úloha IV.4 ... analogie

7 bodů; průměr 4,55; řešilo 20 studentů

Mějme dvě hookeovské pružiny s modulem pružnosti $E = 2,01 \text{ GPa}$ a píst s viskozitou $\eta = 9,8 \text{ GPa}\cdot\text{s}$. Závislost napětí σ na relativním prodloužení ε je popsána vztahem $\sigma_s = E\varepsilon_s$ pro pružinu a $\sigma_d = \eta\dot{\varepsilon}_d$ pro píst, přičemž tečka zde značí derivaci podle času. Jednu pružinu délky l_s a píst délky l_d zapojíme do série a poté k nim paralelně připojíme druhou pružinu o délce l_p . Celý tento systém pak náhlým roztažením uvedeme do stavu $\varepsilon_0 = 0,2$ a toto prodloužení dále držíme konstantní. Určete, za jak dlouho od roztažení poklesne napětí v systému na polovinu původní hodnoty, jestliže platí $\frac{l_s}{l_p} = 0,5$.



Mirek vymýšlel úlohu na zkoušce. Zase.

Napětí v sériově zapojené pružině, v paralelní pružině a v pístu označíme postupně σ_s , σ_p a σ_d . Relativní prodloužení bude obdobně ε_s , ε_p a ε_d .

Celkové napětí v systému, které označíme σ , je dáno součtem napětí jednotlivých paralelních částí. Napětí v první části je $\sigma_s = \sigma_d$, zatímco ve druhé je to jednoduše σ_p . Potom

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s. \quad (1)$$

Ze zadání vyplývají vztahy mezi napětími a relativními prodlouženími

$$\sigma_s = E\varepsilon_s, \quad \sigma_p = E\varepsilon_p, \quad \sigma_d = \eta\dot{\varepsilon}_d.$$

Zatím máme 7 neznámých a 5 rovnic, potřebujeme proto získat ještě dvě rovnice. První z nich vychází z faktu, že prodloužení ε_p je konstantní, neboli $\varepsilon_p = \varepsilon_0$. Poslední rovnice vyplývá ze zachování délky. Zřejmě platí $l_p = l_s + l_d$. Obecně (při libovolném natažení) musí platit

$$(1 + \varepsilon_p)l_p = (1 + \varepsilon_s)l_s + (1 + \varepsilon_d)l_d.$$

Pro zjednodušení si definujeme konstantu $\lambda = \frac{l_s}{l_p}$, čímž dostaneme

$$1 + \varepsilon_p = (1 + \varepsilon_s)\lambda + (1 + \varepsilon_d)(1 - \lambda).$$

Toto je naše poslední rovnice. Je jasné, že budeme muset řešit diferenciální rovnici, začneme tedy vyjádřením časové derivace relativního prodloužení pístu

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_d &= \frac{\sigma_d}{\eta} = \frac{\sigma_s}{\eta} = \frac{E\varepsilon_s}{\eta} = \frac{E}{\eta} \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{\lambda} - 1 - (1 + \varepsilon_d) \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{E}{\eta\lambda} (1 + \varepsilon_0 - \lambda - (1 + \varepsilon_d)(1 - \lambda)) = \frac{E}{\eta\lambda} (\varepsilon_0 - (1 - \lambda)\varepsilon_d) = \\ &= -\frac{E(1 - \lambda)}{\eta\lambda} \left(\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} \right). \end{aligned}$$

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda}} d\varepsilon_d &= -\frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} dt, \\ \ln\left(\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda}\right) &= C - \frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} t, \end{aligned}$$

kde C je integrační konstanta. Nyní si můžeme vyjádřit prodloužení pístu

$$\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} + Ae^{-\frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} t},$$

kde $A = e^C$ je další konstanta. Pro její určení použijeme počáteční podmínky. V čase $t = 0$ s (těsně po natažení systému) se píst ještě nestihl dát do pohybu, takže platí $\varepsilon_d(0) = 0$. Z toho plyne

$$A = -\frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} \Rightarrow \varepsilon_d = \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t}\right).$$

Už máme vše potřebné proto, abychom mohli spočítat celkové napětí v systému. Začneme dosazením do rovnice (1)

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s = \sigma_p + \sigma_d = E\varepsilon_0 + \eta\dot{\varepsilon}_d.$$

Dále spočítáme časovou derivaci relativního prodloužení pístu

$$\dot{\varepsilon}_d = -\frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t} \left(-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \frac{E\varepsilon_0}{\eta\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t},$$

kteřou rovnou dosadíme do předchozí rovnice

$$\sigma = E\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0}{\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t} = E\varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t}\right).$$

Podle zadání hledáme čas τ , ve kterém je napětí poloviční oproti počáteční hodnotě, neboli

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sigma(0) = \frac{1}{2}E\varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Odtud už snadno vyjádříme τ jako

$$\tau = \frac{\eta}{E} \frac{\lambda}{1-\lambda} \ln \frac{2}{1-\lambda}.$$

Číselně $\tau \doteq 6,8$ s.

Štěpán Marek

stepan.marek@fykos.cz

Úloha IV.5 ... vrtulník

9 bodů; průměr 7,00; řešilo 30 studentů

Ptáka Fykosáka už unavovalo létat silou vlastních křídel, a proto začal přemýšlet o stavbě vlastního vrtulníku. Vytvořil si jednoduchý model nosného rotoru a chtěl zjistit, s jakou úhlovou frekvencí ω se má skutečný rotor otáčet. Listy rotoru se zařezávají do vzduchu pod úhlem 45° . Molekuly vzduchu jsou jimi díky tomu odráženy přímo dolů, čímž vzniká tok hybnosti. Molekuly vzduchu považujte za původně nehybné a srážky s nosnou plochou za dokonale pružné.

Účinná část nosné plochy (tj. část skloněná pod úhlem 45° vůči vodorovnému směru) se nachází ve vzdálenosti $r_1 = 50$ cm až $r_2 = 6,00$ m od osy rotace, průmět listu rotoru do svislého směru má výšku $h = 10,0$ cm. Fykosákův vrtulník bude mít čtyři takové listy.

Kolik otáček za sekundu musí rotor vykonat, aby se vrtulník o hmotnosti $m = 2500$ kg právě udržel na místě? Jindrovi bylo vedro, tak si stoupl pod vrtulník.

Obvodová rychlost vrtule závisí na vzdálenosti od osy rotace, tím pádem na ni bude závislá i rychlost sestupného proudu vzduchu. Představme si infinitezimální válcový element vzduchu

obepínající osu rotace ve vzdálenosti r . Výška tohoto elementu je h (stejná jako vertikální výška listu rotoru) a jeho radiální šířka je dr . Tento element vzduchu má hmotnost

$$dm = 2\pi\rho r h dr.$$

Otáčející se list rotoru pošle tento element vzduchu dolů rychlostí $v = \omega r$. Perioda rotoru je $T = 2\pi/\omega$. Hybnost tohoto elementu letícího dolů je

$$dp = v dm = 2\pi\rho\omega h r^2 dr,$$

přičemž se tento děj odehraje za čas T , takže na vrtulník působí element reakční síly směrem nahoru

$$dF_1 = \frac{dp}{T} = \frac{\omega dp}{2\pi} = \rho\omega^2 h r^2 dr.$$

Vztlaková síla působící na vrtulník od jednoho listu rotoru je

$$F_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho\omega^2 h r^2 dr \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{1}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Rotor má $N = 4$ listů, takže celková vztlaková síla je

$$F = \frac{N}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Jestliže se má vrtulník tak akorát udržet ve vzduchu, musí být vztlaková síla rovna tíhové

$$F = mg,$$

kde $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Úhlová frekvence rotoru tak musí být

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg}{N\rho h (r_2^3 - r_1^3)}}.$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání a hustoty vzduchu $\rho = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ dostáváme

$$\omega = 25,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Počet otáček za sekundu je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,09 \text{ Hz}.$$

Rotor musí vykonat 4,09 otáček za sekundu, aby se vrtulník udržel na místě.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha IV.P ... zimnou krajinou

11 bodů; průměr 8,30; řešilo 40 studentů

Zamyslete se nad tím, jak je možné zjednodušit pohyb člověka krajinou v zimních podmínkách. Vezměte do úvahy různé sklony terénu, typy sněhové pokrývky („prašan,“ mokrý sníh, přemrzlý sníh, led, ...) a pomůcky (sněžnice, lyže, mačky, brusle, ...). Popište, jak dané pomůcky z fyzikálního hlediska fungují, a na základě toho určete, které jsou v jakých podmínkách nejvhodnější.

Dodo by chcel konečne poriadnu zimu.

Budeme se řídit radou ze zadání a popíšeme nejdříve fyzikální principy, na kterých dané pomůcky fungují. Poté zmíníme, jaké jsou jejich výhody a nevýhody v různých typech prostředí.

Sněžnice

Sněžnice lidé používali minimálně již před 4 tisíci lety. Fyzikální princip, na kterém sněžnice fungují je totiž velmi jednoduchý. Hloubka, do které se noha člověka snažícího se brodit sněhovou pokrývkou zaboří, se bude zvětšovat s rostoucím tlakem, kterým noha na snáh působí. Pokud tedy zvětšíme plochu, na které tíha působí, tím, že k botě připevníme sněžnici, zmenšíme tím hloubku zaboření.

Hloubka zaboření samozřejmě bude záviset i na typu sněhu. Pokud snáh bude starý a zmrzlý, je možné, že po něm půjde chodit bez zaboření bez sněžnic. Pokud se ale bude jednat o hluboký, čerstvě napadaný snáh, tak se bez nějaké pomůcky zabránující zaboření neobejdeme. I při použití sněžnic se v čerstvém sněhu standardně noha zaboří 15 až 20 cm. Běžně se určuje velikost sněžnice pomocí pravidla $14,5 \text{ cm}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ na jednu sněžnici. Proto horolezecké sněžnice mohou být až 76 cm dlouhé a 25 cm široké.

Tradiční sněžnice se skládaly z dřevěného rámu, na který byla napnuta mřížka z kůží. Moderní sněžnice pak mají buďto kovový nebo plastový rám a výplň ze syntetických materiálů. Horolezecké sněžnice mají také kovové zuby pro lepší stabilitu na strmých svazích.



Obr. 4: Tradiční sněžnice (<https://en.wikipedia.org/wiki/Snowshoe>).



Obr. 5: Moderní sněžnice (<https://en.wikipedia.org/wiki/Snowshoe>).

Mačky

Mačky jsou tvořeny rámem a sadou kovových hrotů, které se připevňují na obuv. Slouží ke zvýšení stability na ledových a sněhových površích. Používají se hlavně v horolezectví, případně při lezení na ledových stěnách. V závislosti na funkci, ke které jsou určeny, mají rozdílnou geometrii hrotů.



Obr. 6: Mačky pro lezení na ledové stěně (<https://en.wikipedia.org/wiki/Crampons>).

Lyže

Stejně jako sněžnice i lyže jsou člověkem využívány již tisíce let. Základní funkce lyží je podobná jako u sněžnic, tedy zvětšení kontaktní plochy se sněhem. K tomu ale navíc slouží k úspoře energie pomocí snížení tření mezi lyží a sněhem. Dnešní lyže jsou ale mnohem sofistikovanější než jejich starověcí předci. V naprosté většině případů jsou lyže používány ještě s hůlkami pro větší mobilitu a stabilitu. Základní dělení lyží je na běžecké a sjezdové. Jak již název napovídá, běžecké lyže slouží k překonávání převážně rovinných terénů, případně k běhu do kopce. Sjezdové lyže pak poskytují velkou kontrolu při sjezdu z kopce. Existují ale také hybridní lyže, které kombinují tyto dvě funkce.

Běžecké lyže Dělením lyží na běžecké a sjezdové jejich klasifikace ale zdaleka nekončí. Běžecké lyže se dále dělí na základě toho, jakou technikou se na nich běhá. Jedná se buďto o lyže klasické nebo lyže na bruslení (skatové). Klasické běžecké lyže se pak dále dělí podle toho, do jakého typu terénu jsou nevhodnější. Některé jsou vhodné do upravené stopy, jiné pak do nedotčené přírody.

Zabýváme se nyní fyzikálním principem techniky klasického běžeckého lyžování, přesněji principem techniky *střídavého běhu*. Zaprvé je nutné zmínit, že u běžeckého lyžování má lyžař volnou patu. Bota je k vázání připevněna pouze ve špičce. Při klasickém lyžování se pak lyžař odrazí z ploch lyží. Klasický běh na lyžích je velmi podobný běhu na „suchu“. Celkově se klasický běh na lyžích dá rozdělit do tří fází: odraz z jedné nohy, přesun váhy na druhou nohu a skluz. Jak je ale možné, že se lyžař dokáže odrazit z plochy lyže bez toho aby došlo k podklouznutí? To umožňuje speciální tvar lyží, jež jsou (dvojité) klenuté⁶ a zároveň použitím tzv. *stoupacího vosku* v určité části skluznice lyže. Této části skluznice se říká *mazací komora* a nachází se pod vázáním. Stoupací vosk slouží ke zvýšení tření skluznice a sněhu, aby bylo možné se odrazit. U některých lyží bývá skluznice v oblasti mazací komory opatřena tzv. „šupinami“, které slouží ke zvýšení tření mezi sněhem a lyží v momentu odrazu. Takoveto lyže se pak nemusí mazat stoupacími vosky.

⁶ Anglický název pro toto klenutí je *double camber*.



Obr. 7: Klenutí klasické běžecké lyže
(<https://tahoetrailguide.com>).



Obr. 8: Protiskuzový vzor pod vázáním
(<https://tahoetrailguide.com>).

Pokud tedy lyži položíme na rovný podklad, bude se ho dotýkat pouze u špičky a u jejího konce. První klenutí slouží k rovnoměrnému rozložení váhy lyžaře. Pokud však bude stát na obou lyžích zároveň, nebude lyže zcela narovnaná (pokud lyžař používá správně dlouhé lyže). Mazací komora stále nebude v kontaktu s podkladem. Teprve když lyžař bude stát celou vahou na jedné lyži, dojde ke kontaktu mazací komory se sněhem a bude se moci odrazit.⁷

Dalším stylem jízdy, který také spadá do klasického běžeckého lyžování, a kterou využívají hlavně závodní lyžaři, je technika zvaná *soupaž*. U této techniky neprobíhá odraz z ploch lyží - lyžař je poháněn vpřed pouze odrazy hůlek. Tento styl ale pro naprostou většinu lyžařů není dlouhodobě udržitelný. Pokud je ale lyžař dostatečně sebevědomý a věří, že celou plánovanou trasu zvládne tímto stylem, nemusí lyže mazat stoupacím voskem.

Lyže pro klasické lyžování ve stopě jsou velice lehké a tenké (40 – 50 mm) a navíc k dosažení zmiňovaného dvojitého klenutí nejsou opatřeny kovovými hranami, které by negativně ovlivňovaly tuhost a váhu lyží. Běžecké lyže také na rozdíl od lyží sjezdových nemají postranní výřez, tzn. jsou ve všech místech přibližně stejně široké. To napomáhá lyži jet rovně. Na druhou stranu se s ní pak poměrně obtížně zatáčí.

Mimo klasické lyžování se v 80. letech rozmohla alternativní technika, tzv. *bruslení*. Jak již název napovídá, tento styl lyžování má mnoho podobného s ledním či in-line bruslením. Místo odrazů z ploch se v tomto případě lyžař odráží z hran lyží. Tento způsob jízdy je rychlejší než obě techniky klasického lyžování, neboť pro odraz při střídavém běhu je při odrazu daná lyže vždy v klidu. Při soupaži se zase minimálně využívá spodní část těla, což není tolik efektivní. Na druhou stranu, aby bylo bruslení možné, musí být trať upravená, sníh musí být alespoň trochu stlačený, jinak by se lyže propadávaly do sněhu a bruslení by bylo prakticky nemožné. Skatové lyže jsou kratší než klasické, mají nižší klenutí a jsou tužší.

Sjezdové lyže Sjezdové lyže se od těch běžeckých poměrně výrazně liší. Jsou zpravidla kratší, širší, a navíc jsou užší v oblasti vázání oproti jejich koncům (hrany lyží opisují část kružnice). Dále pak mají kovové hrany a jejich klenutí je nižší než u běžeckých klasických lyží. Tvar klenutí se mění v závislosti na tom, na jaký typ sjezdu je lyže určena. V některých případech je klenutí

⁷ V ideálním případě by ani po přesunutí celé váhy neměla být mazací komora v kontaktu se sněhem, protože skluz by správně měl probíhat právě na jedné noze. Až teprve při odrazu směrem nahoru a dopředu se lyže ještě dodatečně stlačí a v tu chvíli dojde ke kontaktu. Tato situace je ale pouze ideální případ, kterého dosahují lyžaři s výbornou technikou a začátečníci by na takovéto lyži nebyli schopni se pořádně odrazit.



Obr. 9: Skatová vs klasická technika
(<https://www.lofsdalen.com/en/cross-country-skiing>).

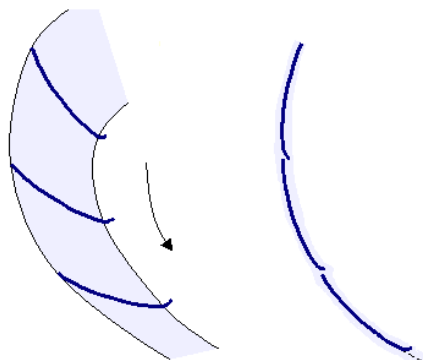
dokonce záporné po celé lyži, nebo se kombinuje se standardním v určitých částech lyže. Noha je tentokrát k lyži připevněna jak ve špičce tak u paty, neboť je žádoucí co největší kontrola nad lyží.

Jelikož sjezd přímo dolů ze svahu je pro naprostou většinu lyžařů v podstatě sebevražda (i na standardních lyžích je možné dosáhnout rychlostí přes $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$), je nutné nějakým způsobem brzdít. To se dělá zatáčením. Zatáčet se na lyžích dá zatáčet dvěma způsoby.

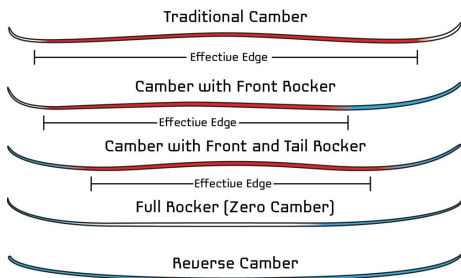
Pokud lyžař zatáčí smykem, seškrabuje při zahranění lyží vrchní vrstvu sněhu ze sjezdovky, přičemž zpětná reakce sněhu lyžaře brzdí. Při tomto způsobu nejsou lyže v rovnoběžné poloze se směrem rychlosti lyžaře. Tato technika není příliš náročná, protože lyžař nemusí vyvinout tak velký tlak na hranu lyží, aby dosáhl požadovaného efektu.

Pokročilejší technika je tzv. *carvingový* oblouk. V tomto případě lyžař jede také po hraně lyže, ale tentokrát na ni musí vyvinout dostatečně velký tlak, aby se zasekla do sjezdovky dostatečně hluboko. Pokud toto nastane, lyžař již nebude podjíždět směrem vně okamžitého oblouku jeho trajektorie, ale udrží si kruhovou trajektorii (viz obr. 10).

Typy klenutí a míra vykrojení lyží výrazně ovlivňují jejich jízdní vlastnosti. U dnešních lyží se standardně kombinuje tradiční klenutí uprostřed lyží a záporné klenutí na koncích lyže. Standardní klenutí slouží k požadovanému rozložení hmotnosti lyžaře po celé délce lyže, čím se zvyšuje efektivní hrana lyže (tzn. délka hrany lyže, která je v dané situaci v kontaktu se sněhem) při carvingovém oblouku. Záporné klenutí na koncích lyže snižuje efektivní hrana při malém úhlu naklonění lyže, tedy při malých rychlostech, což umožňuje velkou míru kontroly nad lyžema. Při zvětšujících se úhlech naklonění lyže pak roste délka efektivní hrany, což zvětšuje stabilitu lyže při carvingovém oblouku. I když mají sjezdové lyže uprostřed tradiční klenutí, ve velkých rychlostech se stejně prohnou na druhou stranu, neboť to je jediný způsob, jak může být vykrojená hrana lyže po celé její délce v kontaktu se sjezdovkou (viz obr. 12). Tímto způsobem je ale váha lyžaře rozložena po hraně lyže rovnoměrně. Lyže se záporným klenutím se potom používají v podstatě jenom na jízdu mimo sjezdovku v hlubokém sněhu.



Obr. 10: Smyk vs carvingový oblouk
(<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).



Obr. 11: Typy profilů sjezdových lyží
(<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).

Hybridní lyže Ukázali jsme si základní principy konstrukcí lyží běžeckých a sjezdových a z nich plynoucí požadované vlastnosti v daných situacích. Designéři lyží se ale také snaží tyto vlastnosti kombinovat do jedné sady lyží. Vznikají potom lyže, které nejsou vynikající ani v jedné situaci, ale dají se použít v obou případech. Existuje celé spektrum lyží mezi hraničními případy klasických běžeckých lyží a lyží sjezdových. Potom už záleží na daném lyžaři, jakým způsobem má v plánu lyže použít. Pokud např. zvětšíme tloušťku klasické lyže a opatříme jí kovovými hranami, nebude tak elastická a sníží se tím pádem její skluz, ale půjde zase použít v hlubším sněhu a také se s ní jednodušeji budou sjíždět svahy.

Existují pak nejen hybridní lyže ale i hybridní technika sjezdu, kdy lyžař má upevněnou pouze špičku boty, tzv. *Telemark*.⁸

Brusle

Dalším velice starým nástrojem využívaným ke zefektivnění pohybu člověka v zimní krajině jsou brusle. Pokud bereme za samozřejmé, že led je kluzký, tak princip fungování bruslí není nijak složitý. Brusle mají ostré hrany, kterými se zařezávají do ledu a tím pádem je v té chvíli umožněn pohyb pouze ve směru nože brusle. Bruslař se tedy odrazí ve směru kolmém na pohyb brusle. Vhodným nakloněním bruslí se poté bruslař pohybuje vpřed. Výhodou bruslení oproti chůzi je, že se ve velké míře zachovává kinetická energie bruslaře a také že pro odraz není nutné, aby noha bruslaře byla v klidu.

Nože bruslí nejsou vybrusěny do tvaru „V“ jak by si možná někdo mohl myslet. Jejich tloušťka je ve všech místech stejná (1 – 4 mm), tím pádem má každá z bruslí dvě hrany (viz obr. 14b). Dále je pak u většiny bruslí zesponu vybrusěna žlábkem. Čím hlubší (resp. čím menší poloměr žlábků) tím je brusle stabilnější a lépe ovladatelná, ale za cenu snížení rychlosti. Z toho důvodu jsou brusle rychlobruslařů zesponu zcela rovné, krasobruslaři mají zase žlábků velmi hluboké. Hokejisté se pohybují někde mezi těmito dvěma extrémy. Navíc nejsou nože po délce zcela rovné, ale mají vypouklý profil. To zaručuje lepší ovladatelnost.

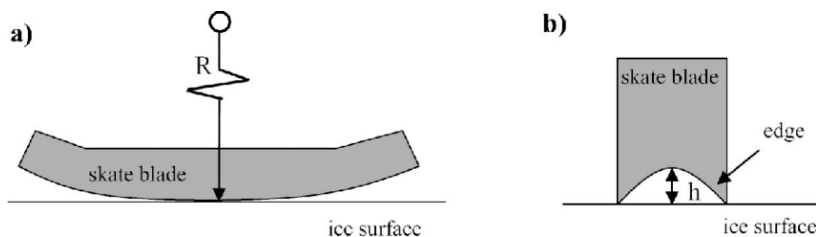
⁸Telemark je také jméno Norského města kde norští řemeslníci v polovině 19. století vynalezli tradiční klenutí lyže. Tato sjezdová technika je pak také ta originální, neboť v té době ještě neexistovaly vázání s pevnou patou.



Obr. 12: Závodník v carvingovém oblouku (<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).



Obr. 13: Závodník v telemarkovém oblouku (https://en.wikipedia.org/wiki/Telemark_skiing).



Obr. 14: Nože bruslí (https://www.researchgate.net/publication/5243786_Ice_friction_of_flared_ice_hockey_skate_blades).

To, že je vůbec možné na ledě bruslit bylo dlouho vysvětlováno tím, že s rostoucím tlakem klesá hodnota bodu tání vody. Led měl pod působením tlaku roztát a brusle by potom mohla klouzat po tenké vrstvě vody. Toto se však ukázalo jako nedostatečné vysvětlení, protože v uvažované situaci není dosahováno dostatečných tlaků pro bruslení pod $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jiné vysvětlení je založené skutečnosti, kterou objevil již Michael Faraday a to je fakt, že se na ledu přirozeně vyskytuje mikroskopická vrstva vody (až do $-38\text{ }^{\circ}\text{C}$). Spolu s táním ledu vlivem tření (i když toto tření je relativně malé) při vyšších rychlostech pak vzniká kolem hran bruslí dostatečně silná vrstva vody a brusle po ledě klouže.

Použití v terénu

Nakonec porovnáme výhody a nevýhody zmíněných pomůcek v různých typech prostředí.

Rovinná oblast Pro pohyb v zasněžené rovinné oblasti bude v naprosté většině případů nejvhodnější použít běžecské lyže. Alternativou jsou potom sněžnice. Lyže ale budou v podstatě

vždy rychlejší než sněžnice a zkušený lyžař také nebude muset vynaložit tolik sil pro uražení stejné vzdálenosti z důvodu nízkého tření mezi lyžemi a sněhem. To znamená, že se pomocí jediného odrazu dostane dál než turista na sněžnicích a také při jízdě z kopce (klidně i mírného) nemusí vynaložit v podstatě žádnou energii. Toto platí v podstatě pro všechny typy sněhové pokrývky, i když pro každý tento typ je nutné zvolit vhodný typ lyží a také je správné připravit (namazat správným typem stoupacího vosku a parafinu).

Přesto sněžnice poskytují určité výhody. Pokud by se např. turista chtěl vydat na delší výpravu, kde by s sebou potřeboval vzít větší množství zásob a nesl by je v batohu, tak by dodatečné zatížení mohlo značně zkomplikovat jízdu na lyžích. Dané běžecké lyže jsou většinou určeny pro relativně úzký interval váhy lyžaře a pokud by byl přetížený, bude mu drhnout mazací komora, což by vedlo k výraznému zhoršení skluzu lyží. To by se ale dalo vyřešit tím, že by zásoby táhl za sebou. Další výhodou sněžnic je, že je to méně komplikovaný nástroj a z toho důvodu i méně náchylný k závadám. To také hraje významnou roli při delších výpravách.

Další výhoda sněžnic je, že se v nich lépe manévruje. Kdyby se turista např. pohyboval v hustém lese, je možné že jízda na lyžích bude značně komplikovaná.

Kopcovitá oblast Tento případ je velmi podobný případu předchozímu. Na lyžích je možné stoupat do kopce v naprosté většině sněhových podmínek, pokud jsou lyže správně namazané, popř. pokud mají dostatečně vhodný protiskluzový vzor pod vázáním. Pro velmi strmé svahy je pak také možné určité typy lyží opatřit stoupacími pásy, které se táhnou po celé délce lyže. Jízdou z kopce potom lyžař ušetří mnoho sil a času. Výhodou sněžnic je potom jednoduchost použití a menší náchylnost k závadám.

Hory Při pohybu v horských oblastech již velmi záleží na konkrétních podmínkách a jaké cíle má daný turista/horolezec. Nejstrmější svahu, které je na lyžích možné zdolat (za použití stoupacích pásů), mají sklon stoupání někde kolem 30° (viz obr. 15). To je možné ale jen v případech ideálních sněhových podmínek. Pokud je sníh velmi hluboký a čerstvý, tak není dostatečně stabilní pro tento typ stoupání. Pokud je zase moc namrzlý, tak nebude dostatečně vysoké tření mezi pásy a sněhem a stoupání znovu nebude bezpečné nebo vůbec možné.

Pro strmější svahy nebo v případech, kdy horolezec nemá v úmyslu cestu zpátky sjíždět na lyžích, se potom používá kombinace sněžnic a maček v závislosti na sněhových podmínkách. Pro lezení na ledových stěnách se pak vždy používají specializované mačky.

Zamrzlé vodní plochy Pro pohyb na zamrzlých vodních plochách jsou patrně nejvhodnější brusle, ale to jen v případech, kdy zamrzlá vodní plocha není zároveň zasněžená. Pokud je zasněžená, je nejvhodnější použití lyží.

Jan Novotný
jan.novotny@fykos.cz

Úloha IV.E ... užitečná mince

12 bodů; průměr 7,86; řešilo 36 studentů

Změrte alespoň tři fyzikální vlastnosti nejmenší platné mince měny státu, ve kterém žijete. Makroskopické rozměry považujeme za jednu veličinu. Hodnotíme nejen přesnost měření a podrobnost popisu, ale i originalitu při výběru veličin.

Karel chtěl, aby účastníci pozorovali peníze.



Obr. 15: Extrémní případ skialpinisty stoupajícího pod úhlem 34°
(<http://straightchuter.com/steep-skinning-technique/>)

Teorie

V této úloze se budeme zabývat charakteristikami českých jednorunových mincí, pro mince jiné nominální hodnoty či měny by však měření probíhala obdobně.⁹ První důležitou částí úlohy je samozřejmě výběr veličin, které budeme měřit. Možností je velmi mnoho, ať už nás zajímají vlastnosti tepelné, elektrické, optické či mechanické. Mnoho z nich by však vyžadovalo použití nákladného laboratorního vybavení, které není samozřejmostí. V tomto řešení se proto zaměříme především na vlastnosti mechanické, a to konkrétně makroskopické rozměry a objem, hmotnost, hustotu a moment setrvačnosti. K těmto veličinám přidáme ještě jednu, jejíž měření je náročnější, leč stále proveditelné, a to tepelnou kapacitu.

Pro měření makroskopických rozměrů využijeme posuvného měřítka. Jedná se o měření přímé, o to více tedy budeme dbát na kvalitu jeho provedení. Při opakování měření použijeme různé mince – jednak se tak vyhneme chybě, kdy by na minci například byla vada či nečistota, ale také tím ověříme, že je rozumné mince považovat za identické. Zjišťovat budeme dva parametry, a to poloměr mince d a její tloušťku h . Můžeme předpokládat, že mince je váleček, jehož objem určíme pomocí vzorce

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Víme však, že se nejedná o váleček dokonalý. Tento odhad tedy porovnáme s přímým měřením. To provedeme tak, že do odměrného válce nalijeme dobře definované množství vody, přisypeme co nejvíce mincí, zjistíme rozdíl ve výšce hladin a vypočítáme jejich objem. Vyšší přesnosti můžeme dosáhnout, máme-li k dispozici přesnou pipetu. V takovém případě nalijeme do válce vodu přesně po některou z rysek, přisypeme mince a pomocí pipety odebereme (a tím naměříme) vodu tak, aby sahala opět přesně po danou rysku. V tomto řešení budeme využívat právě

⁹Jistým předpokladem je tedy že je mince kulatá a homogenní – například dánské koruny mají uprostřed zpravidla díru a mince Eura nebo česká padesátikoruna jsou vyrobeny ze dvou různých materiálů, padesátipencová mince je výrazně sedmiúhelníková... U takovýchto mincí by bylo třeba upravit jisté předpoklady.

metodu s pipetou.

Hmotnost mince změříme opět přímo pomocí váhy. Je dobré si pamatovat, že nemáme-li k dispozici přesnou váhu, můžeme vyšší přesnosti dosáhnout použitím většího množství mincí. Známe-li hmotnost i objem mince, dokážeme určit její hustotu jako

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Další měřenou veličinou je moment setrvačnosti J , konkrétně moment setrvačnosti vzhledem k ose mince. Aby bylo měření v domácích podmínkách technicky proveditelné, provedeme na několika místech předpoklad, že mince je dokonalý válec. Hodnotu J zkusíme také vypočítat ze vzorce¹⁰

$$J = \frac{1}{2}m \frac{d^2}{4},$$

oba výsledky pak porovnáme. Využijeme k tomu metodu kyvů, kdy minci zavěšíme ve výšce l nad jejím hmotným středem, mírně vychýlíme a následně změříme dobu kyvu T . Moment setrvačnosti určíme jako¹¹

$$J = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right).$$

Experiment provedeme tak, že na obvod mince kapkou lepidla z tavné pistole přilepíme nit, za kterou minci v požadované výšce pověšíme (výška l je rovna součtu délky nitě a poloměru mince – zde předpokládáme, že mince je válcem, jehož těžiště leží v jeho středu.)

Poslední měřenou veličinou je tepelná kapacita. K jejímu zjištění potřebujeme kalorimetr, který není složité si doma vyrobit. Jde především o to, abychom měli co nejlépe odizolovanou nádobu o známé tepelné kapacitě, čehož lze dosáhnout jednoduše – vložíme malou zavařovací sklenici do izolačního materiálu (např. polystyrenem) vystlané PET lahve, jejíž vrchol jsme předtím odřízli jako jistou pokličku.¹² Takto vyrobený kalorimetr musíme nejdříve zkalibrovat, tedy například do kalorimetru o známé (pokojové) teplotě t_{kalor} nalít dobře definované množství vody o jiné známé teplotě t_v a změřit, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí. Pro výpočet kapacity kalorimetru C lze použít vzorec

$$C = \frac{(t_{\text{end}} - t_v) c_v m_v}{t_{\text{kalor}} - t_{\text{end}}},$$

kde $c_v = 4182 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody a m_v množství vody do kalorimetru nalité. Při měření měrné tepelné kapacity mincí do kalorimetru nalijeme ohřátou vodu o teplotě t_v a hmotnosti m_v , změříme, na jaké teplotě t_K se celý systém ustálí, a následně do něj vložíme mince o známé teplotě t_m (nejjednodušší je vybrat teplotu pokojovou nebo teplotu $T = 0^\circ\text{C}$, které dosáhneme ve vodě s rozpouštějícím se ledem) a hmotnosti m_m . Opět změříme, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí, a výslednou měrnou tepelnou kapacitu mincí c_m pak určíme pomocí rovnice pro teplo (nesmíme zapomenout zahrnout všechny části systému)

$$c_m = \frac{(t_K - t_{\text{end}}) (C + c_v m_v)}{(t_{\text{end}} - t_m) m_m}.$$

¹⁰https://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrvačnosti

¹¹Tento vzorec byl odvozen z rovnice pro fyzické kyvadlo a Steinerovy věty.

¹²Velmi hezký návod lze nalézt např. na <http://fyzweb.cz/clanky/index.php?id=162>.

Výsledky měření

Naměřené hodnoty průměru d , výšky h , objemu V a hmotnosti m jsou uvedeny v tabulce 2. Ve sloupci pro objem jsou hodnoty naměřené pro dvacet mincí, hmotnost byla měřena pro deset mincí. V předposledním řádku je uvedena vypočtená průměrná hodnota, v posledním příslušná směrodatná odchylka.

Tab. 2: Naměřené hodnoty d , h a $10m$.

	d mm	h mm	$20V$ cm ³	$10m$ g
1	20,00	1,90	9,6	36,11
2	20,00	1,95	9,8	36,12
3	20,00	1,95	9,9	36,14
4	20,10	1,90	9,7	36,12
5	20,00	1,95	9,5	36,06
6	20,00	1,90	9,7	36,06
7	20,00	1,95	9,7	36,06
8	20,05	1,95	9,9	36,11
9	20,00	1,95	9,6	36,00
10	20,00	1,90	9,8	36,03
$E(x)$	20,02	1,93	9,72	36,08
$\text{var}(x)$	0,03	0,03	0,13	0,05

Všechny naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou použitého měřidla. Pro průměr d a tloušťku h to je $\sigma_{\text{posuv}} = 0,05$ mm, pro hmotnost $\sigma_{\text{váha}} = 0,01$ g a pro objem $\sigma_{\text{pipeta}} = 0,1$ ml. Pro určení výsledné odchylky σ zkombinujeme tuto systematickou chybu σ_B s nalezenou směrodatnou odchylkou σ_A

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Výsledné hodnoty průměru, tloušťky a hmotnosti jedné mince jsou

$$d = 20,02(6) \text{ mm},$$

$$h = 1,93(6) \text{ mm},$$

$$V = 0,486(8) \text{ cm}^3,$$

$$m = 3,608(5) \text{ g}.$$

Z naměřených hodnot d a h můžeme vypočítat hodnotu objemu pro dokonale válcovitou minci. Tato hodnota je

$$V_{\text{teor}} = 0,61(2) \text{ cm}^3.$$

Chyba byla vypočítána ze zákona pro šíření nejistot¹³ jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{2V}{d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{V}{h}\sigma_h\right)^2}.$$

¹³Viz např. https://fykos.cz/_media/rocnik30/serial/serial13.pdf.

Tab. 3: Naměřené hodnoty padesáti period kyvu pro tři různé délky závěsu l .

	l_1	l_2	l_3
	$\frac{50T}{s}$		
1	27,05	20,86	15,79
2	27,07	20,84	15,15
3	26,97	20,63	15,90
4	26,84	20,57	15,73
5	26,92	20,67	16,01
6	26,88	20,59	
7	26,83	20,54	
8	26,82	20,52	
9	26,94	20,57	
10	26,83	20,71	
$E(x)$	26,9	20,7	15,7
$\text{var}(x)$	0,1	0,1	0,3

Pomocí naměřeného objemu a hmotnosti můžeme vypočítat hustotu mince

$$\rho = 7,4(1) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.$$

Chyba byla určena pomocí vzorce

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\rho}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\rho}{V}\sigma_V\right)^2}.$$

Při měření momentu setrvačnosti vůči hlavní ose byly použity tři délky závěsu (měřeno od středu mince k závěsnému bodu), a to $l_1 = 6,5 \text{ cm}$, $l_2 = 3,9 \text{ cm}$ a $l_3 = 1 \text{ cm}$. Se závěsy délek l_1 a l_2 bylo provedeno deset měření doby padesáti period, s nejkratším závěsem l_3 bylo z důvodu technické obtížnosti provedeno pouze pět měření. Všechny naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. Data jsou zatížena chybou odpovídající reakční době člověka, kterou zde odhadujeme na $\sigma_T = 0,2 \text{ s}$ (nepřesnost stopek $\sigma_{T_0} = 0,01 \text{ s}$ je vůči této hodnotě zanedbatelná). V posledních dvou řádcích jsou, stejně jako v předchozí tabulce, uvedeny průměrné hodnoty a příslušné směrodatné odchylky. Se započtením systematické chyby měřidla jsou doby jedné periody pro různé délky závěsu rovny

$$T_{l_1} = 0,538(4) \text{ s},$$

$$T_{l_2} = 0,413(5) \text{ s},$$

$$T_{l_3} = 0,314(8) \text{ s}.$$

Ze známých hodnot m , l a T nyní můžeme určit moment setrvačnosti J vůči hlavní ose mince. Tyto hodnoty a jim příslušející chyby jsou zapsány v tabulce 4. Chyby byly vypočteny pomocí vzorce

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{J}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(2ml\frac{gT}{4\pi^2}\sigma_T\right)^2 + \left(\left(m\frac{gT^2}{4\pi^2} - 2ml\right)\sigma_l\right)^2}.$$

Tab. 4: Vypočtené hodnoty momentu setrvačnosti a jim příslušející chyby pro různé délky závěsu.

l cm	J kg·m ²	σ_J kg·m ²
6,5(1)	$1,64 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$
3,9(1)	$4,76 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
1,0(1)	$5,25 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$

Očekáváme, že moment setrvačnosti by měl být jediná hodnota shodná pro různá měření, vypočteme jej proto jako aritmetický průměr všech získaných výsledků. Chybu odhadneme jako kombinaci aritmetického průměru chyb a směrodatné odchylky. Výslednou hodnotou je

$$J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Tuto hodnotu můžeme také vypočítat pomocí modelu mince = válec, v tom případě je moment setrvačnosti roven

$$J_{\text{teor}} = 1,8(1) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Poslední měřenou veličinou je měrná tepelná kapacita. Podle návodu si sestavíme kalorimetr, který zkalibruje.



Obr. 16: Fotografie rozloženého kalorimetru. Vlevo – tepelná izolace stojící na váze, uprostřed – nádobka kalorimetru, vpravo – izolované víko s kuchyňským teploměrem.

Naměřené hodnoty t_{kalor} , t_v , t_{end} , m_v a z nich vypočtené hodnoty C jsou uvedeny v tabulce 5. Nepřesnost použitého odporového teploměru je $\sigma_t = 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$, nepřesnost váhy je pro účely tohoto měření velmi malá a můžeme ji proto zanedbat. Výpočet chyb se nám velmi zjednoduší, budeme-li rozdíly ($t_{\text{end}} - t_v$) a ($t_{\text{kalor}} - t_{\text{end}}$) považovat za přímo měřené veličiny s nejistotou¹⁴ $\sigma_{\Delta t} =$

¹⁴Tato nejistota vznikne jako $\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t$.

$= \sqrt{0,02} \text{ } ^\circ\text{C} \doteq 0,14 \text{ } ^\circ\text{C}$. Chybu pak určíme jako

$$\sigma_C = C\sigma_{\Delta t} \sqrt{\left(\frac{1}{t_{\text{end}} - t_v}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_{\text{kálor}} - t_{\text{end}}}\right)^2}.$$

Tepelnou kapacitu kalorimetru určíme jako aritmetický průměr všech výsledků. Ten je roven

Tab. 5: Naměřené hodnoty pro kalibraci a z nich vypočtená kapacita kalorimetru.

$\frac{t_{\text{kálor}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{t_v}{^\circ\text{C}}$	$\frac{t_{\text{end}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{m_v}{\text{g}}$	$\frac{C}{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\frac{\sigma_C}{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$
21,3	61,0	50,4	39,70	60,48	0,85
21,3	57,8	49,2	43,81	56,47	0,96
21,3	55,5	47,7	48,19	59,54	1,1
21,3	52,5	45,7	48,28	56,27	1,2
21,3	50,0	43,3	47,28	60,22	1,3

$$C = 59(2) \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Uvedená chyba je určena jako kombinace průměru jednotlivých chyb a směrodatné odchylky. Nyní již máme vše potřebné k tomu, abychom mohli určit měrnou tepelnou kapacitu mincí. K měření bylo využito vždy dvacet mincí, jejich hmotnost byla $m_m = 72,16 \text{ g}$ (tato hodnota je v rámci výpočtu chyby považována za přesnou). Naměřené hodnoty t_K , t_m , t_{end} , m_v a vypočtené hodnoty c_m jsou uvedeny v tabulce 6. Chyby byly vypočteny pomocí vzorce

$$\sigma_{c_m} = \sqrt{\left(\frac{c_m}{t_K - t_{\text{end}}}\sigma_{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{c_m}{t_{\text{end}} - t_m}\sigma_{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{(t_K - t_{\text{end}})}{(t_{\text{end}} - t_m)m_m}\sigma_C\right)^2}.$$

Výslednou hodnotu a její nejistotu získáme stejně jako v případě tepelné kapacity kalorimetru,

Tab. 6: Naměřené hodnoty výpočet měrné tepelné kapacity mincí.

$\frac{t_K}{^\circ\text{C}}$	$\frac{t_m}{^\circ\text{C}}$	$\frac{t_{\text{end}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{m_v}{\text{g}}$	$\frac{c_m}{\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\frac{\sigma_{c_m}}{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$
50,5	22,1	47,1	40,45	429	18
47,5	22,1	44,2	43,08	494	22
51,5	22,2	47,3	39,47	519	18
60,2	22,3	55,1	38,55	474	14
59,2	22,5	54,3	39,25	476	14
56,8	22,5	51,5	37,32	544	16
56,0	22,6	51,5	41,10	497	16
54,2	22,6	50,0	41,04	489	17
55,0	22,7	50,1	36,71	526	16
51,6	22,8	47,9	41,13	471	19

tedy

$$c_m = 490(40) \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Diskuse

Při měření makroskopických rozměrů neočekáváme výraznější chyby nebo rozdíly mezi mincemi – to, že jsou nerozlišitelné, je jedna ze základních vlastností mincí. Toto jsme také měřením ověřili – rozdíly se pohybují maximálně v řádu jedné desetiny milimetru, mohou být způsobeny například nečistotou nebo lehkou korozí některé z mincí. Obdobná situace nastává u hmotnosti, rozptyl naměřených hodnot je zde také v rámci jedné desetiny gramu, což mohou zapříčínovat stejné faktory. Náš předpoklad, že všechny mince jsou navzájem stejné a tedy nezáleží na tom, kterou konkrétní minci k měření využijeme (platí zejména pro moment setrvačnosti, ostatní veličiny měříme pro větší množství mincí), je tedy oprávněný. Naměřené hodnoty můžeme porovnat s tabulkovými hodnotami uváděnými Českou národní bankou¹⁵ *materiál ocel galvanicky pokovená niklem, magnetická, kulatá, hmotnost 3,6 g, průměr 20 mm, síla 1,85 mm, hrana vroubkovaná, 80 vroubků, tolerance v obsahu niklu – 0,5 %, v hmotnosti $\pm 0,15$ g, v průměru $\pm 0,1$ mm a v síle $\pm 0,13$ mm*. Vidíme, že hmotnost i průměr odpovídají velmi dobře, při měření tloušťky pak muselo dojít ke drobné systematické chybě, ať už vlivem vadného měřidla či rozlišovacích schopností experimentátora. Je nepravděpodobné, že by všechny měřené mince (každé měření probíhalo na jiné minci) byly znečištěné či zkorodované stejným způsobem.

Prvních větších nepřesností si můžeme všimnout při měření objemu. Jedním z problémů je malé množství použitých mincí – bylo-li by jich použito například 100, byl by jejich objem pětkrát větší, což by nám umožnilo měřit pětkrát přesněji (tj. s pětkrát menší chybou). Další problém spočívá v tom, že voda smáčí stěny skleněné nádoby, a určení přesné výšky hladiny je proto obtížné. Tento problém lze do jisté míry omezit použitím užší nádoby, neboť v té se výška hladiny s objemem mění výrazněji. V neposlední řadě pak na mincích mohou zůstat přichycené vzduchové bublinky nebo naopak kapky vody z předešlého měření, což též ovlivňuje celkovou změnu objemu. Až zarážející rozdíl panuje mezi změřenou hodnotou $V = 0,486(8) \text{ cm}^3$ a hodnotou vypočtenou s předpokladem, že mince je válec, $V_{\text{teor}} = 0,61(2) \text{ cm}^3$. Pravděpodobně to ukazuje na to, že okraje mince jsou poměrně vystouplé z jejího profilu a tloušťka středu mince je asi o 1/5 menší, představa dokonalého válce tedy není zcela oprávněná. Co se týče hustoty, i přes nepřesnosti měření jsme získali hodnotu blízkou hustotě oceli $\rho_o = 7,8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Rozdíl může být kromě chyb v měření způsoben i malým množstvím niklu, jímž je mince potažena.

Aproximaci dokonalého válce neodpovídá ani moment setrvačnosti. Výsledná naměřená hodnota $J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ se výrazně liší od hodnoty pro válec s hmotností a rozměry mince, $J_{\text{teor}} = 1,8(1) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a to i přes značně vysokou nejistotu experimentálního výsledku. Odhad je nižší než experimentální hodnota, což znamená že možným vylepšením by mohl být model sestavený ze dvou částí – středového válce a rozšířeného okraje tvaru mezikruží. K jeho výpočtu však nemáme dostatek informací, nedokážeme uspokojivě rozdělit hmotnost těchto dvou částí. Dále vidíme, že hodnoty naměřené pro různé délky závěsu se též poměrně výrazně liší. To může znamenat velkou chybu měření, která mohla nastat hned několika způsoby. Jednak jde o samotné počítání kyvů, kde mohl lidský faktor selhávat, neboť kyvy probíhaly velmi rychle, kvůli čemuž bylo obtížné neudělat chybu v jejich počítání. Navíc se často do pohybu mince dostala jistá forma rotace kolem svislé osy, která výsledky mohla výrazně ovlivnit (obecně při pootočení měříme moment setrvačnosti vůči jiné ose, vždy kolmé ke směru pohybu). Těto rotaci nešlo úplně zamezit – pokud bychom použili tužší lanko, již bychom nemohli zanedbat jeho hmotnost tak jako u nitě. Jak bylo zmíněno, k připevnění mince k niti bylo použito lepidlo,

¹⁵<https://www.cnb.cz/cs/bankovky-a-mince/mince/1-kc/>

konkrétně z tavné pistole. Jeho vliv na výsledky byl zanedbán, neboť jeho hmotnost (získaná jako rozdíl hmotnosti mince před nalepením a po nalepení) byla typicky 0,01 – 0,02 g, což je v poměru s ostatními nepřesnostmi měření nicotná hodnota.

Při kalibraci kalorimetru je dobré si uvědomit, že neměříme pouze tepelnou kapacitu nádoby, ale také kvantifikujeme běžné tepelné ztráty, které soustava vykazuje (odpařování vody, ohřev dalších částí kalorimetru, tepelnou kapacitu teploměru). Pokud tedy samotné měření provedeme podobným způsobem jako kalibraci (tj. obdobné časové prodlevy u stejných úkonů, stejná doba na ustálení teploty), do značné míry tím vliv těchto nežádoucích efektů potlačíme. Pro zajímavost, teoretická hodnota tepelné kapacity skleněné nádoby používané jako vnitřní nádoba kalorimetru je asi $52 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, naměřená hodnota $C = 59(2) \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ tak dává smysl, neboť kvůli ostatním tepelným ztrátám očekáváme hodnotu právě o něco vyšší než samotnou tepelnou kapacitu nádoby. Při měření bychom pravděpodobně dosáhli přesnějších výsledků při použití většího množství mincí (změna teploty by byla výraznější a méně by se projevila např. nejistota teploměru i menší tepelné ztráty). Celkově však dostáváme hodnotu blízkou hodnotě měrné tepelné kapacity oceli $c_o = 450 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, ze které by mince měly být vyrobeny.¹⁶ Mince jsou galvanicky pokoveny niklem, ten však kvůli svému malému množství nebude mít na tepelnou kapacitu velký vliv.

Závěr

Experimentálně byly změřeny makroskopické rozměry a základní fyzické charakteristiky mince

$$d = 20,02(6) \text{ mm} ,$$

$$h = 1,93(6) \text{ mm} ,$$

$$V = 0,486(8) \text{ cm}^3 ,$$

$$m = 3,608(5) \text{ g} .$$

Dále byl u mince změřen moment setrvačnosti vůči její hlavní ose

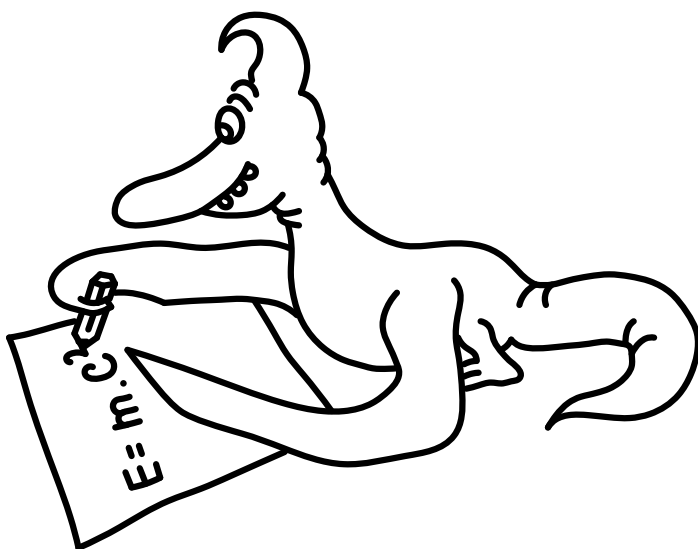
$$J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

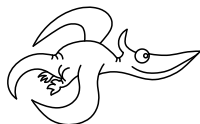
a měrná tepelná kapacita

$$c_m = 490(40) \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} .$$

Jiří Blaha
jirka.b@fykos.cz

¹⁶Samozřejmě, ocel je souhrnným názvem pro mnoho různých slitin železa obohaceného o uhlík, hodnota je tedy pouze orientační, neboť přesné poměry neznáme.





Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	„%“	Σ
Student	MFF UK	6	6	5	7	9	11	12	10	66	100	18	264
1.–2. Matouš Mišta	G, Olomouc-Hejčín	6	6	5	7	8	7	11	6	56	76	13	193
1.–2. Michal Stroff	G, Budějovická, Praha	6	8	5	6	9	8	12	–	54	82	13	193
3. David Něnička	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	2	5	7	9	5	12	–	42	76	10	152
4. Tomáš Kubrický	G Poštová, Košice	6	8	5	–	–	7	11	–	37	85	9	140
5. Vladimír Slanina	G Poštová, Košice	4	8	5	–	–	–	9	–	26	82	8	122
6.–7. Jan Theodor Hrdý	BG B. Balbína, Hradec Králové	2	8	2	0	–	5	–	–	17	60	8	114
6.–7. Pavla Šimová	G, Šumperk	6	0	2	3	–	10	8	–	29	71	8	114
8. Ivan Zemlička	G Ústavní, Praha	4	6	5	–	9	10	–	–	34	65	7	112
9. Petr Brettschneider	G, Dukelská, Bruntál	2	2	1	–	4	7	10	–	26	46	6	94
10. Adam Bretsňajder	G Z. Wintra, Rakovník	4	–	1	–	–	–	4	–	9	55	5	83
11.–12. Adam Pustka	G F. X. Šaldy, Liberec	4	6	–	–	–	8	8	–	26	74	5	71
11.–12. Jakub Radim Zbončák	G, Křenová, Brno	2	6	–	–	8	8	4	–	28	48	5	71
13. Petr Toman	G, Velké Meziříčí	4	2	–	–	4	–	–	–	10	44	4	63
14. Patrik Štencel	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	3	51
15. Michal Sykáček	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	4	2	–	–	–	–	–	–	6	56	3	44
16. Václav Verner	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	2	40
17. Tomáš Otrubčák	G Ludovita Štúra, Trenčín	6	–	2	–	–	5	–	–	13	57	2	33
18. Tomáš Boureka	G J. Heyrovského, Praha	6	–	–	–	–	–	–	–	6	65	1	26
19. Michal Branda	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	1	24
20. Ondřej Hejsek	G a SOŠ, Jilemnice	2	0	1	0	–	–	–	–	3	18	1	23
21. Adam Filip	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	1	19
22.–23. Yavor Herashchanka	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	1	18
22.–23. Veronika Roskovská	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	18
24. Dominik Marton	G Poštová, Košice	2	–	–	–	–	–	–	–	2	53	1	16
25. Barbora Edlová	G, Tachov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1	15
26. Vojtěch Trnka	G J. Vrchlického, Klatovy	–	0	1	–	–	–	–	–	1	33	0	13
27.–28. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	12
27.–28. Matyáš Matta	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	0	12
29.–31. Matěj Hušek	G, Turnov	–	2	–	–	–	–	–	–	2	38	0	11
29.–31. Eduard Plic	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	11
29.–31. Vilém Učík	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	0	11
32.–34. Kryštof Mazera	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	0	10
32.–34. Jáchym Předota	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	0	10
32.–34. Lucie Roskovská	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	0	10
35. Marek Kalenda	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	0	9
36.–37. Lucie Martínková	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
36.–37. Veronika Menšíková	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
38. Jan Hrdina	G Na Vítězné pláni, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	0	7

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“%	Σ		
			6	6	5	7	9	11	12	10	66	100	18	264	
1.	<i>Jan Klír</i>	G B. Hrabala	8	6	5	7	9	12	12	10	69	84	14	210	
2.	<i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	6	5	2	9	13	10	–	49	76	12	180	
3.	<i>Veronika Plevná</i>	G, Cheb	6	6	5	–	7	12	–	–	36	73	8	124	
4.	<i>Jakub Savula</i>	G Jírovcova, České Budějovice	4	4	2	1	6	8	9	–	34	58	7	110	
5.	<i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	5	–	–	9	10	–	34	66	7	100	
6.	<i>Lukáš Linhart</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	6	–	2	–	6	6	–	–	20	63	6	96	
7.–8.	<i>Veronika Bartáková</i>	Slovenské G, Olomouc	6	6	–	–	–	9	–	–	21	71	5	83	
7.–8.	<i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	6	–	–	–	7	9	–	24	57	5	83	
9.	<i>Monika Drezlerová</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	4	–	–	–	7	5	–	18	41	5	73	
10.	<i>Daniel Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	4	70	
11.	<i>Radek Truhlář</i>	G, Cheb	6	2	2	–	6	–	–	–	16	64	4	65	
12.	<i>Maxmilian Ladislav Skuda</i>	G, Boskovice	4	0	–	–	–	7	6	–	17	50	4	59	
13.	<i>Martin Chrostek</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	3	56	
14.	<i>Marek Pučejdl</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	4	–	–	–	–	9	–	–	13	83	3	55	
15.	<i>Vít Říha</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	3	47	
16.	<i>Jan Zrůst</i>	G Botičská, Praha	–	6	2	–	–	–	–	–	–	8	71	3	42
17.	<i>Klára Plchová</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	5	1	–	–	6	39	2	38
18.	<i>Antonie Fejfarová</i>	G Botičská, Praha	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2	40	2	37
19.	<i>David Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	2	–	–	–	–	–	–	–	2	68	2	34
20.–21.	<i>Tadeáš Roblík</i>	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	2	32
20.–21.	<i>Aneta Vašíčková</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	7	8	–	15	54	2	32	
22.	<i>Lukáš Váňa</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	2	29
23.	<i>Václav Vinkler</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	2	28
24.	<i>Benjamín Král</i>	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	1	20
25.	<i>Vojtěch Minárik</i>	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	1	19
26.	<i>Barbora Klusáková</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	1	18
27.	<i>Jakub Svobodník</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	1	17
28.	<i>Lukáš Müller</i>	Podkrušnohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	25	1	16
29.	<i>Michaela Radoměřská</i>	G, Voděradská, Praha	4	–	–	–	–	–	–	–	–	4	78	1	14
30.	<i>Patrik Číhal</i>	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	0	13
31.–32.	<i>Julie Matulová</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	12
31.–32.	<i>Filip Neubauer</i>	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	0	12
33.–35.	<i>Vítězslav Lamoš</i>	G, Omšická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	11
33.–35.	<i>Vojtěch Martínek</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	11
33.–35.	<i>Tereza Teplanská</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	11
36.–37.	<i>Filip Hošek</i>	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	10
36.–37.	<i>Filip Rásó</i>	Súkromné Bilingválne G., Galanta	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	0	10
38.	<i>Tereza Lichtenbergová</i>	G Botičská, Praha	–	2	1	–	–	6	–	–	–	9	26	0	9
39.	<i>Filip Hanzlík</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
40.–43.	<i>Jakub Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
40.–43.	<i>Vojtěch Man</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	6
40.–43.	<i>David Theodor Nimrichtr</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
40.–43.	<i>Marek Štorek</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%	“%	Σ
		6	6	5	7	9	11	12	10	66	100	18	264
44.–46. <i>Kristýna Bělušová</i>	G J. Pivečky, Slavičín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
44.–46. <i>Michal Hrotko</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	0	4
44.–46. <i>Jiří Sýkora</i>	G, Trhové Sviny	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	4
47.–49. <i>Peter Holý</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
47.–49. <i>Anna Jiříčková</i>	G a Hudební škola, Praha 3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
47.–49. <i>Aneta Vavřínová</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%	“%	Σ
		3	3	5	7	9	11	12	10	60	100	16	240
1.–2. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	2	4	5	7	9	-	-	10	37	89	9	132
1.–2. <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Satu Mare, RO	2	4	4	6	8	7	6	-	37	69	9	132
3. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	2	4	2	1	4	8	10	-	31	57	8	119
4. <i>Denisa Trnková</i>	G Nad Štolou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	7	113
5. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	2	1	4	6	4	10	5	-	32	54	7	109
6. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	3	4	5	6	9	-	10	-	37	78	7	107
7. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	3	2	2	-	8	9	8	-	32	65	7	104
8. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	2	1	1	1	2	14	11	-	32	59	7	103
9. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	3	1	3	-	-	8	5	-	20	47	6	87
10. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	1	1	-	1	11	9	-	25	48	5	84
11. <i>Tereza Blažková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	2	1	1	-	7	8	5	-	24	51	5	83
12. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	2	3	5	-	-	-	-	-	10	59	5	74
13. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	2	-	5	-	9	-	12	-	28	69	4	66
14. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	1	1	1	-	-	-	5	-	8	38	4	59
15. <i>Adam Póša</i>	G Alejová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	4	57
16. <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	3	55
17. <i>Ivana Durkošová</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	1	0	1	-	-	6	4	-	12	35	3	51
18.–19. <i>Jakub Míkáč</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	3	47
18.–19. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	3	47
20. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	3	45
21. <i>Jonáš Venc</i>	G, Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	37	2	39
22. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	2	1	4	7	9	-	-	-	23	78	2	38
23. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	2	36
24. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	2	0	1	-	-	-	-	-	3	51	2	32
25. <i>Michal Kišš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	2	31
26.–27. <i>Lída Kačenková</i>	G, Budějovická, Praha	3	-	-	-	-	9	9	-	21	53	2	30
26.–27. <i>Jiří Polách</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	2	1	2	-	-	-	-	-	5	41	2	30
28.–29. <i>Mikuláš Fiala</i>	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	2	29
28.–29. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	2	29
30.–31. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	1	3	1	-	-	-	-	-	5	33	2	28
30.–31. <i>Václav Tichavský</i>	G Jana Nerudy, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	2	28
32. <i>Vojtěch Haslinger</i>	G, Lovosice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	1	25
33. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	1	21

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	„%“	Σ
		3	3	5	7	9	11	12	10	60	100	16	240
34. <i>Karolína Žídková</i>	G O. Havlové, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51	1	20
35.-37. <i>Josef Ferda</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	1	17
35.-37. <i>Viliam Geffert</i>	G Poštová, Košice	3	-	-	-	-	-	-	-	3	85	1	17
35.-37. <i>Vojtěch Marek</i>	Biskupské G, Brno	3	-	5	-	-	-	9	-	17	85	1	17
38. <i>Petr David Lanča</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	1	-	-	-	-	-	-	-	1	44	1	16
39.-40. <i>Vojtěch Lančarič</i>	SPŠ Praha 10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	1	14
39.-40. <i>Jakub Petrovický</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	1	14
41. <i>Mikuláš Sulovský</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	0	13
42.-44. <i>Barbora Čemanová</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	0	12
42.-44. <i>Zdeněk Hartman</i>	G, Broumov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	0	12
42.-44. <i>Štěpán Šmětka</i>	Letohradské soukromé gymnázium L	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30	0	12
45.-46. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	0	11
45.-46. <i>Dávid Jopek</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20	0	11
47.-48. <i>Patrik Bašo</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	0	10
47.-48. <i>Anna Vodáková</i>	G, Litovel	1	0	1	-	-	5	-	-	7	33	0	10
49.-50. <i>Šimon Bízek</i>	G Na Pražáče, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	15	0	9
49.-50. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	9
51.-53. <i>Matej Donoval</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	8
51.-53. <i>Matěj Olič</i>	G V. Hlavatého, Louny	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	0	8
51.-53. <i>Míchaela Valtrová</i>	Mendelovo G, Opava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	44	0	8
54.-55. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	0	7
54.-55. <i>Jan Tomšej</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	32	0	7
56. <i>Tomaš Názler</i>	SPŠ a VOŠT Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20	0	6
57.-58. <i>Karolína Prasková</i>	Masarykova sš zemědělská a voš O	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	0	5
57.-58. <i>Nikita Zykov</i>	G Na Pražáče, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29	0	5
59.-62. <i>Bogdans Grebņevs</i>	Riga Tech. Univ. Engin. HS, LV	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
59.-62. <i>Martina Plevová</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21	0	4
59.-62. <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
59.-62. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
63. <i>Jan Petkov</i>	Mendelovo G, Opava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
64.-65. <i>Marek Plachý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	2
64.-65. <i>Míchal Puš</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	2
66. <i>Filip Msallam</i>	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	1
67. <i>Vojtěch Svoboda</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	3	3	5	7	9	11	12	10	60	100	16	240
1. Filip Vrto	G J. Škody, Přerov	3	3	5	7	4	14	12	–	48	70	10	155
2. Aleš Opl	G a Hudební škola, Praha 3	3	4	5	7	9	–	–	–	28	93	9	142
3. David Chudožilov	Reálné G a ZŠ, Prostějov	–	4	5	–	9	–	0	–	18	87	8	125
4. Jakub Mikeš	G J. Škody, Přerov	3	3	5	7	8	11	–	–	37	79	7	106
5. Jiří Kohl	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	99	7	104
6. Elena Chocholaková	G L. Svobodu, Humenné	2	4	5	–	–	–	–	–	11	76	6	99
7. Martin Fedorko	G J. A. Raymana, Prešov	2	–	5	–	–	–	–	–	7	88	6	86
8. Jan Pijáček	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	5	85
9. Josef Vácha	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	5	80
10. Matěj Charousek	G Na Vítězné pláni, Praha	2	1	1	–	–	11	–	–	15	63	5	74
11. Adam Krška	G, Mikulov	–	4	4	–	9	–	–	–	17	79	5	72
12. Daniel Škýpala	G, Olomouc-Hejčín	2	3	–	–	–	–	–	–	5	63	5	71
13. Hynek Jakeš	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	4	60
14. David Juda	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	4	58
15. Aneta Piklová	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	3	54
16. Vojtěch Stránský	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	3	51
17. Jakub Pelc	G, Benešov	2	–	–	–	–	4	4	–	10	49	3	48
18. Pavlína Zavřelová	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	3	46
19. Nicolas Gavorník	G, Myjava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	3	45
20. Dávid Brodňanský	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	2	34
21. Marie Lausová	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	2	30
22.–23. Tomáš Heger	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	1	22
22.–23. Aleš Manuel Papáček	G, Třeboň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	1	22
24. Jakub Maťa	G J. Škody, Přerov	2	4	5	3	7	–	–	–	21	78	1	21
25. Matěj Mocek	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	1	20
26.–28. Lukáš Fidler	Jiráskovo G, Náchod	1	–	–	–	–	–	–	–	1	75	1	18
26.–28. Jiří Harvalík	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	1	18
26.–28. Karel Podzimek	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	1	18
29. Nikita Ustinov	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	17
30. Matej Korž	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	1	16
31. Matouš Hofmeister	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	1	15
32.–33. Luboš Bariak	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	1	14
32.–33. Adam Húštava	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	1	14
34. Eliška Malá	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	0	13
35. Antonín Kubík	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	0	10
36. Jan Marjanko	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	0	8
37. Michal Šrank	Gymnázium Angely Merici	–	1	1	–	–	–	–	–	2	44	0	7
38.–43. Jozef Mičán	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
38.–43. Jozef Mičán	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
38.–43. Matouš Novotný	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0	3
38.–43. Lukáš Ščerbanovský	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
38.–43. Jakub Šimek	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
38.–43. Michal Uliáš	Smíchovská SPŠ Praha 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
44. Marie Jankolová	G Botičská, Praha	2	–	–	–	–	–	–	–	2	67	0	2



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

 @FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.