

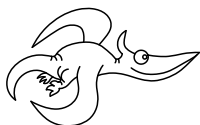
Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

série se sérií sešla a právě v rukou držíte poslední zadání úloh 35. ročníku. Tentokrát se podíváme na mýdlové bubliny, poletíme raketou, změříme minutu nebo se již naladíme na prázdniny přívalovým deštěm. Všechny tyto úlohy a další vám mohou naposledy pomoci ve vylepšení dosavadního skóre, které hraje roli v možnosti účasti na podzimním soustředění. Když už je řeč o soustředění, právě vrcholí přípravy toho jarního, které se uskuteční na konci dubna. Už se na vás všechny moc těšíme!

Závěrem přejeme maturantům úspěšné složení všech zkoušek! A pokud by vám bylo líto, že FYKOS už nemůžete řešit, organizátorské brány jsou vám otevřeny! :)

Organizátoři



Zadání VI. série

Termín uploadu: 10. 5. 2022 23.59

Termín odeslání: 9. 5. 2022

Úloha VI.1 ... Superman v akci

3 body

Lex Luthor zajal Lois Lane a vyhodil ji z letadla ve výšce h . Superman se za ní rozletí a v nějaké výšce ji chytí. Předpokládejme, že Lois dokáže přežít zrychlení maximálně $10g$. V jaké nejnižší výšce ji může Superman chytit, aby ji stihl zachránit?

Úloha VI.2 ... generační hrozba

3 body

Představte si, že by existovala kometa, která by ohrožovala Zemi jednou za generaci, přičemž by v tomto okamžiku byla ve svém periheliu. V jaké vzdálenosti od Země bude taková kometa v afelu a jaká bude délka hlavní poloosy a relativní excentricita její dráhy? Neuvažujte jiné gravitační vlivy než od Slunce a předpokládejte, že jedna generace má $g = 20$ let.

Úloha VI.3 ... povětrná bublinka

5 bodů

Bublifikem vytvoříme malou mýdlovou bublinku. Jakou rychlostí bude padat k zemi? Bublinka má vnější poloměr R a plošnou hustotu s .

Úloha VI.4 ... rychlý poločas

7 bodů

Jaká je pravděpodobnost, že se z jednoho molu radioaktivní látky během jednoho poločasu rozpadu rozpadnou tři čtvrtiny původního počtu atomů? Obvykle by se to mělo stát až za dva poločasy rozpadu. Kvůli čemu bychom mohli takovou situaci pozorovat?

Úloha VI.5 ... leť, raketo, leť

10 bodů

Postavili jsme malou raketu s hmotností $m_0 = 3$ kg, z níž 70% tvoří palivo. Výtoková rychlost spalín je $u = 200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a jejich hmotnostní tok je $R = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Raketa je vybavena stabili-

začínají prvky, takže se nevychyluje z dráhy a startuje z klidu kolmo vzhůru. Předpokládejte, že odporová síla vzduchu je přímo úměrná rychlosti, $F_o = -bv$, kde $b = 0,05 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, v je rychlost rakety a znaménko minus znamená, že síla působí proti směru pohybu. V jaké výšce nad povrchem se bude raketa nacházet v čase $T = 25 \text{ s}$ od zažehnutí motoru?

Úloha VI.P ... přivalový déšť

10 bodů

Je dobré schovávat se před deštěm v lese? Vytvořte vhodný model popisující tuto problematiku. Uvažte například hustotu olistění a intenzitu a délku deště. Popište, za jak dlouho od začátku deště začnou kapky z listů dopadat na zem, za jak dlouho po skončení deště v lese přestane pršet a podobně.

Úloha VI.E ... minutovka

12 bodů

Sestavte zařízení, které dokáže co nejpřesněji odměřit jednu minutu. Při konstruování nesmíte pro kalibraci používat žádné měřidlo času. Po sestavení použijte stopky na změření toho, jak je vaše minuta přesná.

Bonus Odměřte deset minut.

Úloha VI.S ... laserujeme

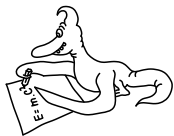
10 bodů

1. Jak velká musí být apertura prostorového filtru, jestliže jsme pro jeho sestavení použili čočku o průměru 40 cm a ohniskové vzdálenosti 4 m? Laserový svazek s gaussovským profilem má na vstupu průměr 30 cm a vlnovou délku 1 053 nm. Poloměr ohniska (tedy parametr σ) gaussovského svazku můžeme vypočítat podle vzorce

$$r = \frac{2}{\pi} \lambda \frac{f}{D},$$

kde D je průměr svazku, f je ohnisková vzdálenost čočky a λ je vlnová délka laseru.

2. Jakou energii musí mít laserový svazek, který je fokusován na povrch palivové peletky o poloměru 1 mm, aby byla dosažena intenzita v ohnisku $10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$? Poloměr ohniska je 25 μm a délka pulzu 10 ns. Kolik svazků celkem potřebujeme, abychom rovnoměrně pokryli povrch peletky? Jaká je jejich celková energie?
3. Jakou energii musí mít laserový, fokusovaný tak, že na povrchu peletky nemá ohnisko, ale průměr svazku odpovídá průměru peletky? Chceme s ním dosáhnout stejné intenzity, jako v předchozím případě. Předpokládejte, že takový svazek máme jeden a že je schopný homogenně ozářit celou peletku „ze všech stran“.



Řešení V. série

Úloha V.1 ... ozářená družice

3 body; průměr 2,59; řešilo 37 studentů

Průměrně jakou část dne stráví ve stínu Země satelit obíhající na nízké oběžné dráze? Uvažujte, že obíhá po kruhové dráze v rovině ekliptiky ve výšce $H = R/10$ nad povrchem, kde R je střední poloměr Země.

Karel myslel na satelity.

Země svým oběhem kolem Slunce za sebou neustále vytváří kužel „zatmění“. Jelikož je ale vzdálenost satelitu od Země o pět řádů menší než k naší hvězdě, aproximujeme sluneční paprsky jako paralelní. Poté spočítáme velikost stíněného úhlu v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou střed Země, průsečík dráhy satelitu s oblastí stínu a průsečík kolmice na přímkou Slunce - střed Země, která jde z předchozího bodu, právě s touto přímkou. Platí

$$R = (R + H) \sin \Theta,$$

$$\Theta = \arcsin \frac{R}{R + \frac{R}{10}} \doteq 65,4^\circ.$$

Teď si výsledek správně interpretujeme. Jedná se o úhel, kam nedopadají paprsky, ale skutečně jím prochází satelit každý den? Ze zadání plyne, že obíhá v rovině ekliptiky, tedy na stejné ploše, kde obíhají planety včetně Země kolem Slunce, a v průběhu roku se jeho trajektorie nemění. Nízká oběžná dráha (LEO) navíc nemá ani výrazné výkyvy mezi jednotlivými dny, protože doba oběhu podle třetího Keplerova zákona

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

bude 1,6 hodiny (o něco víc než ISS), takže je mnohem kratší než délka dne. Průměrně tedy v zákrytu stráví satelit dobu úměrnou poměru mezi vypočítaným a přímým úhlem

$$\frac{2\Theta}{2\pi} = \frac{\Theta}{\pi} \doteq 36,3\%.$$

To je v jednom dni přibližně 8 hodin a 43 minut.

Daniel Fousek

daniel.fousek@fykos.cz

Úloha V.2 ... pecka z třešně

3 body; průměr 3,15; řešilo 52 studentů

Elon Musk plánuje kolonizaci Marsu. Aby se to mohlo stát skutečností, musí tomu předcházet výstavba zásobovacích základen na povrchu Měsíce. Pomozte vyřešit zásadní otázku: jak daleko doletí pecka z třešně, kterou 180 cm vysoký člověk na základně na Měsíci plivne vodorovným směrem? Na Zemi by tato pecka dopadla do vzdálenosti 4,3 m.

Bonus Určete poměr vzdáleností, do kterých tentýž člověk doplní pecku na Zemi a na Měsíci pod libovolným úhlem vzhledem k vodorovné rovině.

Katarína hledala záminku pro výlet na Měsíc.

Máme danú výšku H , z ktorej flusneme a vzdialenosť r_Z , do ktorej dopadne kôstka na Zemi. Z týchto údajov zistíme počiatočnú rýchlosť flusnutia v_0 . Pomocou tejto rýchlosti zase dostaneme vzdialenosť flusnutia na Mesiaci r_M . Napíšeme si rovnice pre súradnice kôstky x a y

$$\begin{aligned}x &= v_0 t, \\y &= H - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

V čase dopadu na Zemi t_Z bude platiť

$$\begin{aligned}0 &= H - \frac{1}{2} g t_Z^2, \\r_Z &= v_0 t_Z.\end{aligned}$$

Pre zemský čas dopadu teda platí $t_Z = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Pomocou tohto času môžeme vyjadriť $v_0 = r_Z \sqrt{\frac{g}{2H}}$. Rovnakým spôsobom dostaneme čas dopadu na Mesiaci $t_M = \sqrt{\frac{2H}{g_M}}$. Pre výslednú vzdialenosť r_M dostávame

$$r_M = v_0 t_M = r_Z \sqrt{\frac{2H g_Z}{2H g_M}} = r_Z \sqrt{\frac{g_Z}{g_M}} \approx r_Z \sqrt{6},$$

Po dosadení čísiel tak máme $r_M = 4,3\sqrt{6} \text{ m} \doteq 10,5 \text{ m}$.

Bonus

Pecka se bude ve vodorovném směru pohybovat konstantní rychlostí v_x , protože na ni nepůsobí žádná síla. Síla na ni působí jen ve směru svislém, ve kterém ji urychluje směrem dolů. Rychlost v tomto směru označme v_y . Počáteční úhel při vyplivnutí je α . Pak platí

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha, \\v_y &= v_0 \sin \alpha - g_i t,\end{aligned}$$

kde g_i označuje tíhové zrychlení na Zemi nebo na Měsíci a t je čas od vyplivnutí.

Každou ze složek poloh x a y jsme se rozhodli vyšetřovat zvlášť a když víme, jak se chovají rychlosti, není problém najít závislosti souřadnic na čase

$$\begin{aligned}x &= v_0 \cos \alpha t, \\y &= H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g_i t^2.\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme do druhé

$$y = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g_i}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Získali jsme tak rovnici paraboly, po které se pecka pohybuje. Bod, kam dopadne, určíme položením $y = 0$ a řešením kvadratické rovnice pro x . Dostáváme

$$x_{1,2} = 2v_0^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_i}{v_0^2}}}{g_i}.$$

Protože jsme uvažovali, že pecka je vyplivnuta ve směru rostoucího x , je pro nás důležitý kladný kořen. Hledaný poměr tak je

$$p = \frac{g_M}{g_Z} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_Z}{v_0^2}}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_M}{v_0^2}}}.$$

Zbývá už jen dosadit $v_0 = r_Z \sqrt{\frac{g_Z}{2H}}$. Potom

$$p = \frac{g_M}{g_Z} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{2H}{r_Z}\right)^2}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{g_M}{g_Z} \left(\frac{2H}{r_Z}\right)^2}}.$$

Při volbě $\alpha = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v první části.

Tomáš Tuleja
tomas.tuleja@fykos.cz

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha V.3 ... pod pokličkou

6 bodů; průměr 3,80; řešilo 30 studentů

Poklička tvaru dutého válce s kruhovým průřezem o poloměru 6,00 cm leží ve vodorovném umyvadle. Pod ní se nachází vzduch o atmosférickém tlaku 1 013 hPa. Při umývání nádobí začneme do umyvadla napouštět vodu o pokojové teplotě. Ta se dostává i pod pokličku a stlačuje tak pod ní uzavřený vzduch. V jistém okamžiku začne poklička plavat. Jak vysoko bude v té chvíli hladina vody? Poklička váží 200 g, má výšku 2,00 cm a její objem můžete zanedbat.

Danka myla nádobí.

Označme výšku vody pod poklicí h a mimo poklici H . Objem vzduchu pod poklicí bude

$$V = (a - h) S,$$

kde a je výška poklice a $S = \pi r^2$ je povrch podstavy poklice. Jelikož je teplota při celém ději konstantní (stejně jako počet částic uzavřeného vzduchu), bude platit stavová rovnice v podobě

$$pV = p_a V_0,$$

kde p je tlak vzduchu pod poklicí a $V_0 = aS$ je jeho počáteční objem. Aby byla splněna rovnováha sil, tento tlak musí být roven hydrostatickému tlaku vody na rozhraní se vzduchem v poklici p_h . Ten spočítáme jednoduše jako

$$p_h = p_a + (H - h) \rho g,$$

kde ρ je hustota vody. Dáme-li všechny rovnice (spolu s podmínkou rovnosti tlaků $p = p_h$) dohromady, dostaneme

$$(p_a + (H - h) \rho g) (a - h) S = p_a V_0,$$

což je kvadratická rovnice ve tvaru

$$h^2 - \left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H \right) h + aH = 0.$$

Řešením jsou kořeny

$$h = \frac{\left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H\right)^2 - 4aH}}{2},$$

kde správně je ten se znaménkem mínus, protože na počátku jsou obě výšky nulové (neboli $h(H=0) = 0$).

Dále budeme předpokládat, že výška vody ještě nedosáhla poklice, neboli že platí $H < a$. Následně odvodíme podmínku zvednutí poklice a ověříme, zda k tomu dojde před tím, než voda stoupne až nad poklici.¹

Za tohoto předpokladu působí na poklici ve vertikálním směru jen tři síly (zanedbáme-li objem stěn), a sice tíhová $F_g = mg$, tlaková od uzavřeného vzduchu $F_p = pS$ a tlaková od atmosféry $F_a = p_a S$. Celková síla ve směru dolů bude

$$F = F_g + F_a - F_p = mg + (p_a - p)S = mg - (H - h)\rho g S,$$

příčemž poklice se zvedne v okamžiku, kdy začne platit $F = 0$, neboli $m = (H - h)\rho S$. Dosadíme z rovnice pro h a dostaneme poměrně komplikovaný výraz, ze kterého po několika úpravách vyjádříme

$$H = \frac{m}{\rho S} \left(1 + \frac{a}{\frac{m}{\rho S} + \frac{p_a}{\rho g}}\right) \approx \frac{m}{\rho S} \left(1 + \frac{a\rho g}{p_a}\right) \doteq 1,78 \text{ cm}.$$

Použili jsme hustotu vody $\rho = 997 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Poklice se zvedne ve chvíli, kdy hladina vody stoupne do výšky $H \doteq 1,78 \text{ cm}$. Jak vidíme, dojde k tomu před tím, než bude celá pod vodou, takže je vše v pořádku.

Zamyslíme-li se ještě nad výsledkem, zjistíme, že kvůli velmi vysoké hodnotě atmosférického tlaku vychází $a\rho g/p_a \ll 1$, takže přibližně platí

$$H \approx \frac{m}{\rho S}.$$

To by odpovídalo situaci, kdybychom vůbec neuvažovali stlačování vzduchu pod poklici. Nicméně, výsledek by se po zaokrouhlení lišil na třetí platné cifře, takže tato aproximace není opodstatněná.

Poznámky k došlým řešením

Najčastejšou chybou v došlých riešeniach bol nesprávny rozbor síl. Vztlaková síla na samotnú pokrievku pôsobí, avšak je zanedbateľne malá, keďže objem ponorenej časti pokrievky je veľmi malý. Ale je možné počítat so vztlakovou silou pôsobiacou na časť vzduchu uzavretého pod pokrievkou, ktorý sa nachádza pod úrovňou hladiny vody v umývadle. Táto vztlaková síla, ktorá pôsobí na vzduchový stĺpec, zodpovedá rozdielu tlakových síl atmosférického tlaku a tlaku vzduchu pod pokrievkou, teda $F_a - F_p$. Niektorí riešitelia dokonca vôbec neuvažovali atmosférický tlak, ktorý ale v tomto príklade hrá dôležitú úlohu. Viacero riešiteľov zanedbalo tiež prítomnosť vody pod pokrievkou, keďže vystúpila do malej výšky. Ako však už bolo spomenuté, takáto aproximácia nás v rámci požadovanej presnosti nedoviedie k správne výsledku.

¹Můžeme si všimnout, že pokud se poklice nezvedne v okamžiku, kdy $H = a$, nezvedne se už nikdy. Vztlaková síla bude stále klesat, zatímco tlak vody shora jenom poroste.

Navyše, takýto predpoklad je potrebné vždy podložiť výpočtom alebo argumentáciou, prečo je oprávnený.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha V.4 ... odpal

7 bodů; průměr 3,10; řešilo 20 studentů

Pták Fykosák odpaloval baseballový míč o hmotnosti m pálkou ve tvaru homogenní tyče s délkovou hustotou λ . Předpokládejme, že tyč je upevněna na jednom svém konci, přičemž se okolo tohoto bodu může otáčet. Fykosák na ni může působit buď konstantním momentem síly M , nebo ji může roztáčet s konstantním výkonem P . Po otočení o úhel $\varphi_0 = 180^\circ$ narazí konec tyče do dosud nehybného míče a dojde k pružné srážce. Při jaké délce tyče l získá míč největší rychlost? Porovnejte obě situace (tj. konstantní M proti konstantnímu P).

Jáchym odpaloval věci.

Nejdříve spočítáme úhlovou rychlost tyče před srážkou (označíme ji ω_0), poté vyřešíme srážku. Dosazením za ω_0 následně dostaneme funkci $v(l)$ a najdeme její extrém.

Hmotnost páčky bude $m_p = \lambda l$. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející koncem tyče potom určíme jako

$$J = \frac{1}{3} m_p l^2 = \frac{1}{3} \lambda l^3.$$

Zabývejme se nyní situací s konstantním výkonem. Kinetická energie tyče v čase t bude $E_k = Pt$. Tento vztah dosadíme do rovnice pro rotační kinetickou energii, odkud si vyjádříme závislost úhlové rychlosti na čase, tj. zapíšeme

$$Pt = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2Pt}{J}}. \quad (1)$$

Nás ovšem zajímá závislost ω na úhlu otočení φ . Celý výraz proto zintegrujeme s výsledkem

$$\varphi = \int \omega dt = \int \sqrt{\frac{2Pt}{J}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2Pt^3}{J}}.$$

Za běžných okolností bychom ještě potřebovali dopočítat integrační konstantu, ale v tomto případě je zřejmě $\varphi(t=0) = 0$, díky čemuž je tato konstanta nulová. Vyjádříme si čas v závislosti na úhlu jako

$$t = \left(\frac{9J\varphi^2}{8P} \right)^{\frac{1}{3}},$$

což následně dosadíme do rovnice (1). V dalším kroku tak pro $\varphi_0 = 180^\circ$ získáme úhlovou rychlost ω_0 při odpalu

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{3P\varphi}{J} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{l} \left(\frac{9P\varphi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \omega_0 &= l^{-1} \left(\frac{9\pi P}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (2)$$

V případě konstantního momentu síly bude situace trochu jednodušší, protože platí obdoba rovnice síly $M = J\varepsilon$. Otáčení páčky se tak řídí stejnými vztahy jako rovnoměrně zrychlený pohyb a lze psát

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{M}{2J}t^2, \\ \omega &= \varepsilon t = \frac{M}{J}\sqrt{\frac{2J\varphi}{M}} = \sqrt{\frac{2M\varphi}{J}} = l^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{6M\varphi}{\lambda}}, \\ \omega_0 &= l^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{6\pi M}{\lambda}}.\end{aligned}\quad (3)$$

Už nyní můžeme vidět, jak se obě situace liší – konstantní výkon vede na vyšší rychlosti pro delší a těžší páčky než konstantní moment síly. Pokračujme dále vyřešením srážky s míčem. Příní se zachová jak energie, tak moment hybnosti soustavy. To zapíšeme jako

$$\begin{aligned}J\omega_0 &= J\omega_1 + lmv, \\ J\omega_0^2 &= J\omega_1^2 + mv^2,\end{aligned}$$

kde v je výsledná rychlost míče a ω_1 značí výslednou úhlovou rychlost páčky. Druhá jmenovaná veličina nás vzhledem k zadání příliš nezajímá, proto se jí nemusíme zabírat a rovnou ji z první rovnice dosadíme do druhé, čímž získáme

$$J\omega_0^2 = J\left(\omega_0 - \frac{lm}{J}v\right)^2 + mv^2.$$

Členy $J\omega_0^2$ se nám na obou stranách odečtou, díky čemuž bude v každém zbývajícím členu v alespoň v první mocnině. Kořen $v = 0$ nedává fyzikální smysl, rovnici tedy směle vydělíme v a máme

$$v = \frac{2Jl\omega_0}{l^2m + J} = \frac{2\lambda l^2}{3m + \lambda l}\omega_0.$$

Nyní nezbývá než dosadit za ω_0 z rovnic (2) a (3), výsledné závislosti zderivovat podle l a tyto položit rovné nule. Začneme s $P = \text{konst}$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}v &= 2(9\pi P\lambda^2)^{\frac{1}{3}}\frac{l}{3m + \lambda l}, \\ \frac{dv}{dl} &= 2(9\pi P\lambda^2)^{\frac{1}{3}}\frac{3m}{(3m + \lambda l)^2}.\end{aligned}$$

Tato závislost nemá žádný extrém, což můžeme dobře vidět, když si ji vykreslíme do grafu. Pro kladná l je $v(l)$ stále rostoucí funkcí. Vysvětlení je takové, že roztočit delší páčku trvá déle, takže jí postupně předáme více energie. Nakonec se sice nebude pohybovat tak rychle, ale zato bude mít velmi velkou hybnost.

V případě $M = \text{konst}$ platí

$$\begin{aligned}v &= 2\sqrt{6\pi M\lambda}\frac{l^{\frac{1}{2}}}{3m + \lambda l}, \\ \frac{dv}{dl} &= \sqrt{6\pi M\lambda}\frac{(3m - \lambda l)l^{-\frac{1}{2}}}{(3m + \lambda l)^2}.\end{aligned}$$

V tomto případě už extrém existuje, konkrétně pro bod $l = 3m/\lambda$. Letmým pohledem do grafu snadno odhalíme, že jde o maximum.

Reálný lidský výkon je bližší druhé možnosti, tzn. člověk dokáže na pátku působit spíše konstantním momentem než s konstantním výkonem. Z tohoto hlediska je pro co nejděší odpal ideální volit pátku splňující $l = 3m/\lambda$. Délkovou hustotu typicky neznáme, můžeme ji však určit jako $\lambda = M/l$, kde M je hmotnost pátky. Potom dostáváme ideální poměr $M = 3m$.

Poměr hmotností běžné baseballové pátky a míčku je přibližně 5 až 6, což je dvakrát tolik, než kolik jsme spočítali. Nesmíme nicméně zapomínat na to, že náš model je velmi zjednodušující a neodpovídá přesně skutečným fyziologickým možnostem člověka. Delší pátku má navíc jiné, pro tuto úlohu nerelevantní výhody, například větší dosah a stabilitu. Dále bychom samozřejmě mohli započítat i typicky nenulovou počáteční rychlost míče.

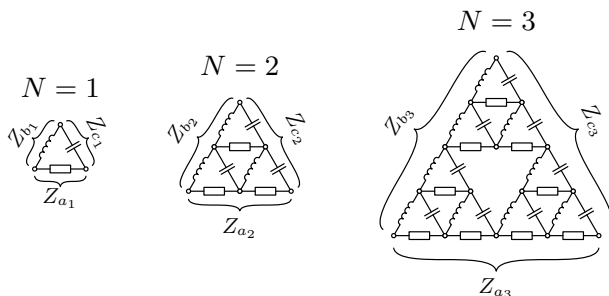
Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha V.5 ... střídavý trojúhelník

8 bodů; průměr 3,33; řešilo 12 studentů

Postavíme si konečný Sierpiňského trojúhelník stupně N (tedy pro $N = 1$ to bude jen trojúhelník, pro $N = 2$ to budou už čtyři trojúhelníky atd.). Na spodních stranách budou vždy rezistory o odporu $R = 150\ \Omega$, na levých stranách cívky o indukčnosti $L = 0,4\ \text{H}$ a na zbylých stranách kondenzátory s kapacitou $C = 20\ \mu\text{F}$. Mezi levým a pravým dolním rohem trojúhelníku měříme impedanci. Úhlová frekvence zdroje je $\omega = 50\ \text{s}^{-1}$. Najděte rekurentní vztahy, které tuto impedanci vyčíslí, a určete její hodnotu pro $N = 7$. Nalezněte rekurentní vztah pro situaci, kdybychom cívky a kondenzátory nahradili odpory R a vyčíslíte ji pro $N = 15$.

Honza má rád fraktály.



Obr. 1: Schéma obvodu.

Tuto úlohu bychom mohli řešit standardním středoškolským způsobem, ale množství aritmetiky, které bychom museli provést, by bylo zbytečně velké. Místo toho použijeme pokročilejší, ale velmi užitečnou metodu, která nám problém výrazně zjednoduší.

Metoda komplexní impedance

Jak název napovídá, budeme používat komplexní čísla. Nejprve se zaměříme na reprezentaci střídavého napětí. Jeho průběh můžeme popsat následujícím vztahem.

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \delta) .$$

Užitím Eulerova vzorce pro komplexní exponenciálu $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ můžeme tento vzorec přepsat na

$$u(t) = \operatorname{Re} \bar{u}(t) = \operatorname{Re} \bar{U}_0 e^{i\omega t} ,$$

kde $\operatorname{Re} z$ je reálná část komplexního čísla, $\bar{u}(t)$ je komplexní napětí a \bar{U}_0 je komplexní amplituda napětí.

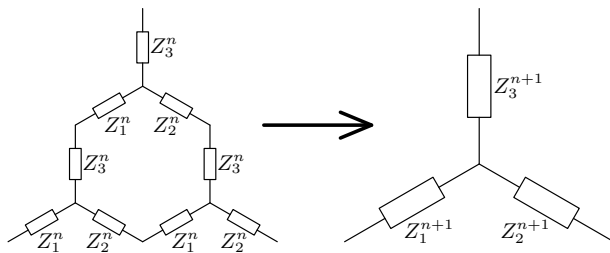
Pokud mezi sebou násobíme dvě komplexní čísla z_1 a z_2 , absolutní hodnota výsledku bude součinem absolutních hodnot z_1 a z_2 . Argument výsledku² bude součtem argumentů z_1 a z_2 . Maximální hodnota napětí tedy bude $U_{\max} = |\bar{U}_0|$ a počáteční fázový posun bude $\delta = \arg(\bar{U}_0)$.

Pokud připustíme i komplexní impedanci, dostaneme podobné chování – absolutní hodnota komplexní impedance nám dá poměr maximální hodnoty napětí a maximální hodnoty proudu a argument nám dá fázový posuv proudu vůči napětí. Zbývá pouze najít způsob, jak komplexní impedanci spočítat.

To provedeme tak, že cívky a kondenzátory nahradíme odpory s imaginární impedancí. Cívky budou mít impedanci $Z_L = i\omega L$ a kondenzátory $Z_C = -\frac{i}{\omega C}$. Hodnotu odporu měnit nebudeme – bude mít reálnou impedanci $Z_R = R$.

Řešení obvodu

Klíčovou úvahou je fakt, že libovolnou iteraci obvodu můžeme zjednodušit na konfiguraci hvězda. Předpokládejme, že se nacházíme v n -té iteraci a že známe impedance Z_1^n, Z_2^n, Z_3^n , kde horní index neznámí mocninu, ale číslo iterace. Vezmeme tři kopie tohoto obvodu a postavíme z nich iteraci $n+1$, kterou převedeme do tvaru hvězdy s rezistory o impedancích $Z_1^{n+1}, Z_2^{n+1}, Z_3^{n+1}$, viz obrázek 2.



Obr. 2: Zjednodušení n -té iterace obvodu.

²Argumentem komplexního čísla nazýváme orientovaný úhel α mezi reálnou osou a vektorem komplexního čísla. Argument spočítáme jako $\alpha = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$.

Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_1^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n + Z_3^n} + \frac{1}{Z_1^n + 2Z_2^n + Z_3^n}}, \\ Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_2^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_2^n + Z_3^n} + \frac{1}{Z_2^n + 2Z_1^n + Z_3^n}}, \\ Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} &= Z_1^n + Z_2^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n + Z_2^n} + \frac{1}{Z_1^n + 2Z_3^n + Z_2^n}}. \end{aligned}$$

Pravou stranu soustavy můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_1^n + Z_3^n + \frac{(Z_1^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_3^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_2^n + Z_3^n + \frac{(Z_2^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_3^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} &= Z_1^n + Z_2^n + \frac{(Z_1^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_2^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}. \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy a několika úpravách dostaneme rekurzivní vztah

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} &= \frac{3Z_1^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_2^{n+1} &= \frac{3Z_2^n}{2} + \frac{Z_1^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_3^{n+1} &= \frac{3Z_3^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}. \end{aligned}$$

V dalším kroku dopočítáme počáteční podmínky pro náš rekurzivní vztah. V první iteraci máme konfiguraci trojúhelník. Použijeme tedy transfigurační vzorec, abychom dostali hodnoty impedancí rezistorů v konfiguraci hvězda. Tyto vzorce se pro komplexní impedanci nebudou nijak lišit, protože „předstíráme“, že cívky a kondenzátory jsou pouze rezistory, jenom za jejich odpory na konci výpočtu dosadíme příslušné imaginární hodnoty. Dostaneme

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= \frac{i\omega RL}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (-2,991\ 15 + 0,457\ 83i)\ \Omega, \\ Z_2^1 &= \frac{-i\frac{R}{\omega C}}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (149,557 - 22,891i)\ \Omega, \\ Z_3^1 &= \frac{\frac{L}{C}}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (3,052\ 2 + 19,941\ 0i)\ \Omega. \end{aligned}$$

Nyní už máme vše potřebné pro vyčíslení libovolné iterace obvodu. Pokud bychom však měli ručně spočítat impedanci sedmé iterace, byl by to dlouhý a nepříjemný výpočet. Doporučujeme

si na to napsat skript, např. v Pythonu, který podporuje aritmetiku komplexních čísel. Po chvilce počítání dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} Z_1^7 &\doteq (230 + 510i) \Omega, \\ Z_2^7 &\doteq (1\,640 - 210i) \Omega, \\ Z_3^7 &\doteq (220 + 540i) \Omega. \end{aligned}$$

Celkovou impedanci obvodu získáme součtem

$$Z = Z_1^7 + Z_2^7 \doteq (1\,870 + 300i) \Omega.$$

Komplexní impedanci můžeme podle diskuse výše interpretovat následovně. Zapišme ji v goniometrickém tvaru

$$Z = |Z| e^{i \arg(Z)} \doteq 1\,890 e^{0,159i} \Omega.$$

Okamžitou hodnotu proudu můžeme popsat podobně jako okamžitou hodnotu napětí (tj. komplexně). Platí pro ni

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re} \bar{i}(t) = \operatorname{Re} \bar{I} e^{i\omega t}, \\ \bar{I} &= \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} \doteq \frac{\bar{U} e^{0,159i}}{1\,890 \Omega}. \end{aligned}$$

Podle pravidel pro násobení komplexních čísel můžeme vidět, že poměr amplitud napětí a proudu bude roven

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = |Z| \doteq 1\,890 \Omega,$$

a fázový posun φ bude

$$\varphi \doteq 0,159.$$

Napětí tedy předbíhá proud a celý obvod se chová jako cívka s rezistorem.

Obvod pouze s odpory

Pokud všechny součástky nahradíme rezistory o odporu R , situace se velmi zjednoduší. Ze tří rekurentních vztahů dostaneme jeden, konkrétně

$$R^{n+1} = \frac{5}{3} R^n.$$

Přes vzorec pro transfiguraci opět dopočítáme R^1 jako

$$R^1 = \frac{1}{3} R.$$

V tomto případě můžeme rekurzivní vzorec převést na explicitní vyjádření odporu n -té iterace

$$R^n = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} R = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{3}\right)^n R,$$

což po dosazení vyjde jako

$$R^{15} \doteq 425 R.$$

Toto je odpor jedné části, pro celkový odpor mezi dvěma sousedními vrcholy (všimněme si, že nyní je již celý trojúhelník symetrický) máme podobně jako v případě komplexních impedancí

$$R_c^{15} = R^{15} + R^{15} \doteq 851R \doteq 128 \text{ k}\Omega.$$

Jan Benda
honzab@fykos.cz

Úloha V.P ... teplý asteroid

10 bodů; průměr 3,77; řešilo 30 studentů

Vymyslete co nejvíce fyzikálních důvodů, proč by asteroid mohl mít vyšší teplotu než okolí.

Karel přemýšlel o Fermiho paradoxu.

Nejprve se musíme zamyslet nad tím, co budeme považovat za teplotu okolí asteroidu. Představme si absolutně černou, dokonale vodivou kouli, nacházející se v konstantní vzdálenosti r od Slunce. Energie záření, kterou tato koule přijme od Slunce za jednotku času, je rovna

$$P_1 = \frac{L}{4\pi r^2} S = \frac{L}{4\pi r^2} \pi R^2,$$

kde $L = 3,86 \cdot 10^{26}$ W je zářivý výkon Slunce, S je plocha, na kterou dopadá světlo, a R poloměr koule. Předpokládejme, že koule má teplotu T_0 . Podle Stefan-Boltzmannova zákona bude koule vyzařovat energii s výkonem

$$P_0 = \sigma S T_0^4,$$

kde σ je známá konstanta. Za dostatečně dlouhý čas se teplota koule ustálí na rovnovážné hodnotě, která odpovídá situaci, kdy bude stejná hodnota výkonu přijatého v dané vzdálenosti od Slunce a výkonu vyzářeného. Tato teplota je dána vztahem

$$T = \left(\frac{P_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L}{16\pi \sigma r^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Právě tuto teplotu dále považujeme za teplotu okolí. Kvůli čemu by mohl asteroid mít nějakou jinou? V první řadě jsme při předchozím výpočtu předpokládali, že koule pohltí všechno přicházející záření. U asteroidu tomu tak nebude - teplota bude záležet na odrazivosti povrchu, tzv. albedu A . Výkon přijatý asteroidem tak bude

$$P_2 = P_1 (1 - A),$$

a teplota (spočítaná analogicky jako v předchozím případě)

$$T = \left(\frac{P_1 (1 - A)}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L (1 - A)}{16\pi \sigma r^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Pro představu o velikosti vlivu tohoto efektu můžeme vypočítat teplotu asteroidu ve vzdálenosti $r = 1$ au. Typický rozměr asteroidu je cca $R = 0,5$ km a albedo $A = 0,1$. Po dosažení vychází $T = 271$ K, pro dokonale vodivou, absolutně černou kouli o stejných parametrech by to bylo 278 K. Pro skutečný asteroid je navíc situace ještě složitější. Jednak nemá albedo úplně stejné na všech místech povrchu, a také se nejedná o dokonale kulaté těleso. Velkou roli hrají nerovnosti, které způsobují teplotní rozdíly (ve stínu je teplota menší než na sluníčku).

V předchozích úvahách jsme počítali s nekonečně vodivým asteroidem. V případě asteroidu s konečnou vodivostí bychom museli řešit rovnici vedení tepla. Pokud se omezíme pouze na její jednorozměrný případ, kdy zkoumáme pouze změny teploty podél jedné přímky v asteroidu, má tvar

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde t je čas, x vzdálenost a χ označuje tepelnou difuzivitu materiálu. Rovnice v podstatě říká, že tepelná energie v objemu V se musí zvýšit o tolik energie, kolik přes povrch přiteče. Pro řešení potřebujeme ještě hraniční podmínku na povrchu

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \sigma T^4 = (1 - A) \varepsilon(t),$$

kde ε je časově závislý tok záření vzhledem k místní normále (dále předpokládáme jeho harmonický průběh) a ε označuje infračervenou emisivitu. Cílem při řešení rovnice je najít teplotu jako funkci času a hloubky. My zde rovnici nebudeme řešit a uvedeme jen výsledek, podrobné řešení viz.³ Zajímá nás hlavně závislost povrchové teploty na čase, pro niž dostaneme

$$T(0, t) = T_{\text{eq}} + \frac{(1 - A) \varepsilon_1}{4 \varepsilon \sigma T_{\text{eq}}^3} \frac{1}{1 + 2\Theta + 2\Theta^2} e^{2\pi f t + \varphi_{\text{th}}},$$

kde f je frekvence otáčení asteroidu

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi f K C \rho}}{4 \pi \varepsilon \sigma T_{\text{eq}}^3}$$

je tepelný parametr a φ_{th} , pro které platí

$$\text{tg } \varphi_{\text{th}} = -\frac{\Theta}{1 + \Theta},$$

značí tepelné zpoždění. Tvar řešení odpovídá periodickým změnám, kdy vyšších teplot dosahuje přivrácená strana, odvrácená naopak nižších. Vůbec nejvyšší teploty dosáhne bod na asteroidu chvíli po jeho polední. Rozdíl mezi teplotami obou stran bude tím menší, čím rychleji bude asteroid rotovat. Pro extrémní případ vázané rotace by byl tedy nejvyšší. Roli bude hrát také excentricita dráhy asteroidu, způsobující změny toku záření vzhledem k normále. V perihelu bude teplota samozřejmě nejvyšší. Vzhledem k tomu, že se vzdálenost tělesa od Slunce mění nejvíce právě v perihelu, lze kolem něj očekávat také největší změny teploty s časem.

Výše zmíněné efekty budou pravděpodobně zdaleka nejvýznamnější. Zamysleme se ale i nad dalšími:

- skleníkový efekt: V případě větších těles typu planet často hraje důležitou roli. Vzhledem k nízkým hmotnostem není však u asteroidů možné, aby si udržely atmosféru, proto tento jev můžeme vyloučit.
- částice slunečního větru: V současné době bude tento efekt opravdu zanedbatelný, v raných fázích vývoje sluneční soustavy byl však sluneční vítr mnohem silnější a teoreticky mohlo docházet k ohřevu při dopadu jeho částic a dále k indukčnímu ohřevu při průchodu nabitých částic elektricky vodivým materiálem planetek.⁴

³<https://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/ashk/povetron-2008-06.pdf>

⁴<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0019103589901875>

- **impakty:** Teplo by mohlo vznikat také při vzájemných srážkách, pokud by se na něj přeměnila část kinetické energie těles. Srážky by však musely probíhat při relativně malých rychlostech, aby se asteroid nerozpadl.
- **radioaktivní rozpad:** Jako zdroj tepla by mohl posloužit nějaký rozpadající se radioaktivní prvek, obsažený v materiálu asteroidu.⁵ Pro přibližný odhad teplotního rozdílu tímto způsobeným uvažujme asteroid o poloměru $R = 1$ km, který je celý složený z radioaktivního U^{238} . Jeho aktivita je $A = 12,4 \text{ Bq}\cdot\text{mg}^{-1}$. Objemový výkon P_V spočteme jako

$$P_V = A\rho E,$$

kde $\rho = 19\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota a $E = 4,27 \text{ MeV}$ energie uvolněná při jednom rozpadu. Celkový výkon tedy je

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 A\rho E.$$

Výslednou teplotu získáme jako

$$T = \left(\frac{P + P_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Číselně vychází 288 K, což je o 10 K víc než vyšlo pro neradioaktivní asteroid. Skutečné asteroidy navíc nejsou celé z uranu, proto tento efekt bude ve skutečnosti ještě mnohem menší.

- **slapový ohřev**

Konečně, velmi horký vzhledem ke vzdálenějšímu okolí se asteroid samozřejmě stane po vstupu do (například zemské) atmosféry, kde se vlivem tření zahřeje až na teplotu několika tisíc stupňů.

Radka Krížová

radka.krizova@fykos.cz

Úloha V.E ... už to fičí

13 bodů; průměr 9,15; řešilo 20 studentů

Změřte moment setrvačnosti válce (vůči jeho hlavní ose) a koule (vůči ose procházející jejím středem) tím, že je budete pouštět z nakloněné roviny.

Karel si říkal, že by účastníci mohli koulet.

Teória

Pri pohybe telesa v tiažovom poli prebieha premena potenciálovej tiažovej energie na iné formy energie. V našom prípade budeme sledovať dynamiku telies. Všetky telesá charakterizuje tzv. moment zotrvačnosti I , teda charakteristika rotácie telesa voči určitej ose. Pri pohybe valca, resp. gule po naklonenej rovine pri nenulových rozmeroch a hmotnosti bude prítomná kinetická a rotačná energia telesa. V prípade, že teleso pustíme pri nulovej rýchlosti a zároveň neprešmykuje, tak pre vzťah energie môžeme v tomto priblížení písať

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

⁵<https://aasnova.org/2022/02/23/meteorites-reveal-radioactive-heating-in-asteroids>

kde Δh je prekonaný výškový rozdiel, v rýchlosť ťažiska telesa a ω uhlová rýchlosť otáčania okolo danej osi.

V odstavci vyššie sme vyslovili podmienku na to, aby teleso neprešmykovalo na našej naklonenej rovine, a teda aby sa celý čas pohybovalo valivým pohybom. Táto podmienka pre jedno otočenie okolo vlastnej osi dáva dokopy rýchlosť v a uhlovú rýchlosť ω . Musí tak byť splnená rovnica

$$v = \omega r,$$

a to v oboch prípadoch, kde r predstavuje polomer gule a v prípade valca je r polomer podstavy.

V domácich podmienkach však vieme rýchlosť objektu merať pomerne obtiažne. Avšak vzdialenosť (resp. dĺžku) naklonenej roviny a čas, za ktorý sa dostane teleso z jedného konca na druhý vieme merať pomerne jednoducho. V prípade homogénneho valca a gule tak popisujeme ich pohyb rovnomerne zrýchleným pohybom. Pre prejetú dráhu, resp. dĺžku s naklonenej roviny s nulovou počiatočnou rýchlosťou máme $s = \frac{1}{2}at_f^2$, kde a je zrýchlenie, ktorým teleso zrýchľuje a t_f čas, za ktorý teleso prejde po rovine. Pre maximálnu dosiahnutú rýchlosť na konci roviny platí

$$v_f = at_f = \frac{2s}{t_f}.$$

S využitím podmienky valivého pohybu a dosadením vzorcov pre tento rovnomerne zrýchlený pohyb dostávame

$$2mg\Delta h = mv_f^2 + \frac{Iv_f^2}{r^2} = \left(\frac{2s}{t_f}\right)^2 \left(m + \frac{I}{r^2}\right),$$

odkiaľ si vyjadríme moment zotrvačnosti ako

$$I = mr^2 \left(\frac{gt_f^2 \Delta h}{2s^2} - 1 \right).$$

Meranie

Ako naklonenú rovinu sme zobrali hladkú drevenú dosku. Ako prvé sme odmerali rozmery valca. Priemer valca sme odmerali pomocou posuvného meradla a odtiaľ sme určili jeho polomer ako $r_V = (13,27 \pm 0,05)$ mm. Výška valca bola $H_V = (75,25 \pm 0,10)$ mm. Pomocou digitálnych váh sme odmerali jeho hmotnosť ako $m_V = (25,5 \pm 0,1)$ g.

Pásovým meradlom sme určili dĺžku naklonenej roviny. Výsledná hodnota bola $s_V = (44,9 \pm 0,2)$ cm. Ako hodnotu tiažového zrýchlenia sme brali hodnotu $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Drevenú dosku sme podložili malými drevenými hranolmi aby sme dosiahli nenulovú hodnotu Δh . Túto hodnotu sme znova odmerali pomocou posuvného meradla. Merali sme pri každom pustení telesa čas t_f a výsledky sú v tabuľke 1. Štatistickú chybu jedného merania času sme určili ako $\sigma_t = 0,20$ s podľa reakčného času človeka.

Priemerný čas tak bol $t_V = (2,26 \pm 0,10)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru, ktorá bola mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa, čo je jedným zo zdrojov štatistickej chyby.

$$\sigma_I = I \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta h}}{\Delta h}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_s}{s}\right)^2}{\left(\frac{gt_f^2 \Delta h}{2s^2} - 1\right)^2} + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2}$$

Tab. 1: Meranie času pre prejdeie valca po naklonenej rovine $\Delta h = (12,5 \pm 0,3)$ mm.

Meranie	t_f s	Meranie	t_f s
1	2,31	11	2,26
2	2,15	12	2,17
3	2,37	13	2,44
4	2,18	14	2,25
5	2,43	15	2,13
6	2,18	16	2,21
7	2,40	17	2,30
8	2,34	18	2,37
9	2,16	19	2,17
10	2,27	20	2,13

Pre valec tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_v = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Pre idelizovaný valec s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

$$I_{vId} = \frac{1}{2} MR^2,$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_{vId} = (2,25 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_{Id} = \frac{1}{2} MR^2 \sqrt{\left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

V druhom prípade sme použili guľu z tvrdej gummy. Počiatok sme mali mierne posunutý a teda pre dĺžku dráhy máme $s_g = (44,1 \pm 0,2)$ cm. Polomer sme odmerali pomocou posuvného meradla a jeho hodnota bola $r_g = (21,32 \pm 0,05)$ mm. Hmotnosť sme zmerali opäť pomocou digitálnych váh a táto hodnota bola $m_g = (37,4 \pm 0,1)$ g. Postupovali sme rovnako ako v predchádzajúcom prípade a púšťali sme guľu po naklonenej rovine a merali sme čas, za ktorý sa dostane na spodný koniec. Použili sme tú istú konfiguráciu. Namerané časy sú v tabuľke 2.

Priemerný čas tak bol $t_g = (2,14 \pm 0,11)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru dát, ktorá bola iba mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa. Pre guľu tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_g = (7,5 \pm 1,8) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Pre idelizovanú guľu s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

$$I_{gId} = \frac{2}{5} MR^2.$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_{gId} = (6,80 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_{Id} = \frac{2}{5} MR^2 \sqrt{\left(\frac{4\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

Tab. 2: Meranie času pre prejdenie gule po naklonenej rovine $\Delta h = (12,5 \pm 0,3)$ mm.

Meranie	$\frac{t_f}{s}$	Meranie	$\frac{t_f}{s}$
1	2,19	11	2,21
2	2,03	12	2,31
3	2,12	13	2,14
4	2,01	14	2,15
5	2,04	15	2,07
6	2,35	16	2,04
7	2,31	17	1,97
8	2,10	18	2,02
9	2,18	19	2,22
10	2,15	20	2,23

Diskusia

V rámci merania sme počítali s vicerými idealizáciami a bolo prítomných viacero faktorov ovplyvňujúcich presnosť merania. Vychádzali sme zo ZZE, ktorý neobsahoval počítanie s energetickými stratami. Zanedbávali sme odporovú silu vzduchu a rovnako sme zanedbali aj valivý odpor. Povrchy neboli dokonale hladké, čo malo za následok absorpciu energie a mohlo to tak systematicky posunúť počítanú hodnotu momentu zotrvačnosti smerom nahor. Taktiež objekty boli vyrobené z dreva a gummy, čo nie sú ideálne materiály pre minimalizáciu odporu.

V oboch prípadoch sme predpokladali rovnomerné zrýchľovanie telies. To však môže platiť iba v prípade dokonale hladkého povrchu a homogénneho rozloženia hmoty v telese. Taktiež povrchy telies mali takmer určité isté nerovnosti. V prípade valčeka bola na jeho povrchu istá vrstva farby, ktorá je z iného materiálu než samotný drevený valček. Taktiež hrany podstáv neboli dokonale ostré ale skôr zaoblené, čo môže znamenať menšiu skutočnú hodnotu momentu zotrvačnosti. V prípade gule je možné že nemusela byť dokonale tvarom symetrická. Systematickú chybu stopiek sme zanedbávali oproti schopnosti registrovať bod dosiahnutia konca roviny. Meranie by sa vedelo spresniť detailnejšou analýzou pomocou spracovania videom alebo väčším množstvom pokusov.

Pre porovnanie nameraných hodnôt sme použili model, dokonalého valca a gule. V oboch prípadoch sú namerané hodnoty od nami odhadnutých posunuté smerom nahor ale zároveň v rámci nami vypočítanej odchýlky. Posunutie tejto hodnoty smerom nahor nie je prekvapivé a taktiež mierne očakávané kvôli stratám energie pri pohybe. Naše odhady majú odchýlku v oboch prípadoch menšiu ako 1%. Taktiež sme zanedbávali ich neideálny tvar avšak odhadujeme, že nám to dáva dobrý odhad pre skutočnú hodnotu momentov zotrvačnosti, ktoré ale nepoznáme.

Pre určenie parametru naklonenej roviny Δh sme predpokladali, že všade v miestnosti je dokonale rovná podlaha. Preto sme mierne nadhodnotili jej chybu $\sigma_{\Delta h}$ oproti presnosti posuvného merača, aby zodpovedala prípadným nerovnostiam na vyššie uvedenú hodnotu. Jej relatívna chyba je ale dosť malá oproti ostatným veličinám, čo nám ospravedľňuje tento krok a celkovo nám príliš nezmení finálnu hodnotu odchýlky. Prípadné naindukovanie náboja na povrchu sme zanedbávali.



Obr. 3: Použité pomôcky: Valec a guľa.

Záver

Namerali sme momenty zotrvačnosti valca a guľe, ktoré sme mali k dispozícii a porovnali ich s odhadom podľa jednotlivých tvarov. Merali sme časy, za ktoré telesá prejdú po naklonenej rovine a zaznamenali ich do tabuľky 1 a 2. Pre valec sme namerali hodnotu

$$I_v = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Porovnali sme to s odhadovanou hodnotou

$$I_{vId} = (2,25 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Pre guľu sme namerali

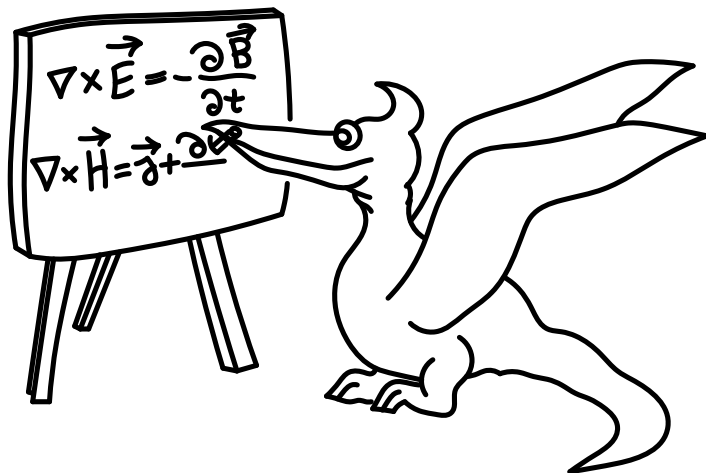
$$I_g = (7,5 \pm 1,8) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

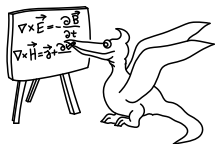
Ďalej sme tiež porovnali s odhadovanou hodnotou

$$I_{gId} = (6,80 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Diskutovali sme faktory, ktoré vstupovali do modelu a výpočtov.

Ivan Hudák
hudakivan@fykos.cz





Seriál: Laserujeme

Celý proces inerciální fúze začíná vytvořením příslušného svazku, který fúzní proces zahájí. Lasery však nejsou jedinou možností pro zapálení inerciální fúze. Předpokládá se, že pro produkci energie ve fúzních elektrárnách najdou uplatnění urychlovače iontů, a to zejména díky své vysoké opakovací frekvenci (MHz – ve srovnání s lasery, které mají 10 Hz). Avšak současné iontové urychlovače (a pravděpodobně ani ty vyvinuté v blízké budoucnosti) nedosáhnou takových proudů částic, aby započaly inerciální fúzi. Proto se věnujeme výzkumu zapálení pomocí laserů a pravděpodobně bude realizována i první demo-elektrárna využívající laserové svazky. V tomto dílu seriálu se proto podíváme, jak fungují lasery používané pro fúzi.

Budiž laserové světlo

Jak funguje laser si ukážeme na dvou systémech, které v současné době slouží k výzkumu inerciální fúze – NIF v Lawrenceově národní laboratoři v Livermore a OMEGA na univerzitě v Rochestru. Oba systémy mají tvarovatelný časový profil impulsu, proto jejich oscilátory – tj. zařízení, kde se vytváří laserové světlo – tomu musí být přizpůsobeny.

Laser NIF začíná vláknovým oscilátorem, kde vlákno je dopováno atomy Yb a vyzařuje lineárně polarizované⁶ světlo na vlnové délce 1053 nm. Tento oscilátor vyzařuje laserové světlo spojitě, tj. stimulovaná emise zde probíhá neustále. Říkáme, že je kontinuální. Oscilátor laseru NIF je spojitě čerpán infračervenými laserovými diodami. Z tohoto kontinuálního světla se vytvoří modulaci amplitudy krátký, zpravidla obdélníkový impuls o délce typicky 20 ns, který je pak zesilován na konečnou energii.

Na druhou stranu oscilátor laseru OMEGA je impulzní Q-spínaný oscilátor, kde laserujícím prostředím je impulzními výbojkami čerpaný krystal Nd:YLF. Délka tohoto vygenerovaného laserového impulsu je typicky 100 ns, aby z něj bylo možné vytvarovat impuls o délce několik desítek ns. Q-spínání funguje tak, že v oscilátoru máme umístěný tzv. Q-spínač, což je v případě OMEGA laseru akusticko-optický modulátor (AOM). Po přiložení napětí se v modulátoru vytvoří akustická vlna, která na světlo působí jako difrakční mřížka.

V případě Q-spínaného laseru čerpáme laserový krystal a vytváříme tak inverzní populaci. Q-spínač je v tomto okamžiku přepnutý takovým způsobem, že veškeré světlo (vzniklé spontánní emisí) odvede pryč z oscilátoru. Když se AOM sepne, světlo zůstane v oscilátoru a dojde k jeho zesílení stimulovanou emisí a vznikne laserové záření.

Laserový oscilátor vytvoří svazek o energii v řádu pJ až μ J. Jelikož na zapálení fúze potřebujeme energii několik MJ, musíme za oscilátor umístit zesilovací stupně. První zesilovač za oscilátorem zpravidla laserový impuls zesílí milionkrát, kdežto ty další, hlavně kvůli technologickým limitům (odvod tepla a chlazení, dostupná energie čerpání atd.), mají zesílení menší (desetkrát až stokrát). Zesilovače obou laserových systémů (NIF i OMEGA) jsou Nd-dopovaná

⁶Oscilátor může generovat v podstatě libovolnou polarizaci, případně i nepolarizované světlo, ale s lineárně polarizovaným se nejnázne pracuje, proto jej většina laserových oscilátorů generuje.

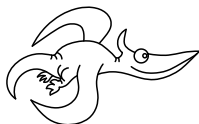
skla, jelikož sklo má relativně dobré tepelné vlastnosti a dokážeme vyrobit prostorově velké díly, což není možné u krystalů.

Jelikož zesílení svazku na energii 1 MJ v impulzu je technologicky nemožné, laser NIF se skládá ze 192 laserových svazků (laser OMEGA ze 60), které synchronizovaně dopadají na palivovou peletku.

Mezi jednotlivými zesilovači jsou umístěny tzv. prostorové filtry, které, jak už název napovídá, vylepšují – vyhlazují – prostorový profil svazku tím, že odfiltrují nechtěné světelné nehomogenity. Prostorový filtr je v podstatě Keplerův teleskop, kde se v místě společného ohniska obou čoček nachází malá apertura, která propustí jen světlo s hladkým prostorovým profilem, takže nehomogenity jsou aperturou zastaveny. Zavedení prostorových filtrů ve vývoji fúzních laserů představovalo obrovský krok vpřed.

Poprvé byly instalovány na laseru Cyclops v roce 1975 kvůli zkušenosti z předchozího laseru jménem Long Path. Tam se při zesilování na vysoké energie (desítky J) pozorovaly výrazné nehomogenity ve svazku, které způsobovaly poškození zesilovačů. Tyto nehomogenity vznikají technologií čerpání – tepelnými toky v prostředí zesilovače. Při vzniku nehomogenity v prostoru může při zesilování dojít k jejímu nelineárnímu fokusování a zesílení, což může dokonce způsobit poškození laserového zesilovače, pokud její intenzita překročí tzv. intenzitu prahu poškození.

Protože homogenita osvětlení palivové peletky je nezbytná pro její úspěšné stlačení, je věnováno veliké úsilí vyhlazení laserového impulzu. Existuje několik technik, jak toho docílit. Všechny jsou zpravidla založeny na snížení koherence laserového záření, čímž se sníží pravděpodobnost, že tyto nehomogenity vytvoří na povrchu terče tzv. horkou skvrnu (nepleťte si to s horkou skvrnou vzniklou uprostřed palivové peletky), kde je velmi vysoká intenzita laseru. Jednu z těchto technik představuje užití tzv. náhodné (resp. kvazináhodné) fázové desky, která fázově posunuje malé části laserového profilu. Čím více těchto částí je, tím více se laserový profil vyhladí. Homogenní intenzita laserového svazku tak může dosáhnout požadované hodnoty ($10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$) pro optimální stlačení palivové peletky.



Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
Student	MFF UK	6	6	6	7	8	10	13	10	66	100	18	330
1. <i>Michal Stroff</i>	G, Budějovická, Praha	6	10	6	6	–	4	11	–	43	84	13	236
2. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76 10 193
3. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	6	6	7	–	3	8	–	36	76	10	188
4. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	6	6	5	–	–	3	11	–	31	81	8	153
5. <i>Tomáš Kubrický</i>	G Poštová, Košice	6	6	–	–	–	–	–	–	12	86	8	152
6. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	0	8	3	4	–	3	13	–	31	69	8	145
7. <i>Ivan Žemlička</i>	G Ústavní, Praha	6	6	6	–	–	2	–	–	20	66	7	132
8. <i>Jan Theodor Hrdý</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60 6 114
9. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46 5 94
10. <i>Adam Bretšnajder</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55 4 83
11. <i>Jakub Radim Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	2	6	–	–	–	3	–	–	11	48	4	82
12. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	6	6	–	–	–	4	–	–	16	48	4	79
13. <i>Adam Pustka</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	6	–	–	–	–	–	–	6	75	4	77
14. <i>Patrik Štencel</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74 2 51
15.–16. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	6	–	–	–	5	–	–	11	59	2	44
15.–16. <i>Michal Sykáček</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56 2 44
17. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29 2 40
18. <i>Ondřej Hejsek</i>	G a SOŠ, Jilemnice	2	4	–	–	–	–	–	–	6	21	1	29
19. <i>Tomáš Bourek</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65 1 26
20. <i>Adam Filip</i>	G, Česká Lípa	–	6	–	–	–	–	–	–	6	61	1	25
21. <i>Michal Branda</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48 1 24
22.–25. <i>Yahor Herashchanka</i>	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75 1 18
22.–25. <i>Vojtěch Janáček</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	6	–	–	–	–	–	–	6	60	1	18
22.–25. <i>Lujza Lea Lavriková</i>	G, P. Horova, Michalovce	6	8	2	–	–	2	–	–	18	64	1	18
22.–25. <i>Veronika Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100 1 18
26. <i>Dominik Marton</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53 0 16
27.–28. <i>Jakub Buzalka</i>	G, Považská Bystrica	6	6	2	–	–	1	–	–	15	54	0	15
27.–28. <i>Barbora Edlová</i>	G, Tachov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50 0 15
29. <i>Vojtěch Trnka</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33 0 13
30. <i>Matyáš Matta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92 0 12
31.–33. <i>Matěj Hušek</i>	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38 0 11
31.–33. <i>Eduard Plic</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100 0 11
31.–33. <i>Vilém Učík</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35 0 11
34.–36. <i>Kryštof Mazera</i>	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83 0 10
34.–36. <i>Jáchym Předota</i>	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91 0 10
34.–36. <i>Lucie Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83 0 10
37. <i>Marek Kalenda</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38 0 9
38.–39. <i>Lucie Martinková</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67 0 8

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	„%“	Σ
<i>Pilný</i>		6	6	6	7	8	10	13	10	66	100	18	330
1. <i>Jan Klír</i>	G B. Hrabala	8	8	6	7	5	6	9	4	53	83	14	263
2. <i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	6	6	4	–	–	6	–	–	22	77	11	202
3. <i>Veronika Plevná</i>	G, Cheb	8	6	4	2	–	1	7	–	28	70	8	152
4. <i>Jakub Savula</i>	G Jiřovcova, České Budějovice	8	8	5	–	–	3	–	–	24	61	7	134
5. <i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	8	2	–	–	–	7	–	21	66	6	121
6. <i>Lukáš Linhart</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	6	6	–	–	3	–	–	15	64	6	111
7. <i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	–	–	–	5	–	–	17	60	5	100
8. <i>Veronika Bartáková</i>	Slovanské G, Olomouc	–	6	–	–	–	–	–	–	6	72	5	89
9. <i>Monika Drezlerová</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	6	–	–	–	–	4	–	12	42	4	85
10. <i>Radek Truhlář</i>	G, Cheb	6	6	–	–	–	–	–	–	12	68	4	77
11. <i>Daniel Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	3	70
12. <i>Maxmilian Ladislav Skuda</i>	G, Boskovice	–	6	–	–	–	3	–	–	9	51	3	68
13. <i>Martin Chrostek</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	3	56
14. <i>Marek Pučejdl</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	3	55
15. <i>Vít Říha</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	2	47
16. <i>Jan Zrůst</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	2	42
17. <i>David Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	7	–	7	65	2	41
18.–19. <i>Klára Plchová</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	2	38
18.–19. <i>Aneta Vašíčková</i>	G Dašická, Pardubice	–	4	–	–	–	2	–	–	6	51	2	38
20. <i>Antonie Fejfarová</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	2	37
21. <i>Tadeáš Roblík</i>	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	1	32
22. <i>Lukáš Váňa</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	1	29
23. <i>Václav Vinkler</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	1	28
24. <i>Lukáš Müller</i>	Podkrušnohorské G, Most	4	2	–	–	–	–	–	–	6	29	1	22
25. <i>Benjamín Král</i>	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	1	20
26. <i>Vojtěch Míňárik</i>	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	1	19
27.–28. <i>Barbora Klusáková</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	1	18
27.–28. <i>Filip Rásó</i>	Súkromné Bilingválne G., Galanta	6	2	–	–	–	–	–	–	8	60	1	18
29. <i>Jakub Svobodník</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	1	17
30. <i>Michaela Radoměřská</i>	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	0	14
31. <i>Patrik Číhal</i>	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	0	13
32.–33. <i>Julie Matulová</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	12
32.–33. <i>Filip Neubauer</i>	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	0	12
34.–36. <i>Vítězslav Lamoš</i>	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	11
34.–36. <i>Vojtěch Martínek</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	11
34.–36. <i>Tereza Teplanská</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	11
37. <i>Filip Hošek</i>	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	10
38. <i>Tereza Lichtenbergová</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	0	–	–	–	–	0	21	0	9
39. <i>Filip Hanzlík</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
40.–43. <i>Jakub Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
40.–43. <i>Vojtěch Man</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	6
40.–43. <i>David Theodor Nimrichtr</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
40.–43. <i>Marek Štorek</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
		6	6	6	7	8	10	13	10	66	100	18	330
44.–46. <i>Kristýna Bělušová</i>	G J. Pivečky, Slavičín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
44.–46. <i>Michal Hrotko</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	0	4
44.–46. <i>Jiří Sýkora</i>	G, Trhové Sviny	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	4
47.–49. <i>Peter Holý</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
47.–49. <i>Anna Jiříčková</i>	G a Hudební škola, Praha 3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
47.–49. <i>Aneta Vavřínová</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
		3	3	6	7	8	10	13	10	60	100	16	300
1. <i>Ioana Mílea</i>	CN Mihai Eminescu, Satu Mare, RO	3	4	5	5	6	7	9	-	39	71	9	171
2. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	3	4	6	6	7	-	-	-	26	90	8	158
3. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	1	2	6	0	0	5	8	-	22	54	7	141
4. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	3	3	6	1	1	5	10	-	29	55	7	138
5. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	5	2	2	7	12	-	34	61	7	137
6. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	1	4	6	-	-	-	12	-	23	80	7	130
7. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	3	3	2	0	2	4	-	-	14	60	6	118
8. <i>Deníša Trnková</i>	G Nad Štolou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	6	113
9. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	2	3	1	0	-	6	10	-	22	49	5	106
10. <i>Tereza Blažková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	3	3	2	-	1	3	7	-	19	49	5	102
11. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	-	3	1	2	-	4	-	-	10	46	5	97
12. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	-	4	2	2	-	11	-	-	19	68	4	85
13. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	4	74
14. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	1	3	2	0	-	-	-	-	6	37	3	65
15. <i>Ivana Durkošová</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	-	3	1	-	1	2	4	-	11	33	3	62
16. <i>Adam Póša</i>	G Alejová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	3	57
17. <i>Pavel Provažník</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	3	55
18.–19. <i>Jakub Míkáč</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	2	47
18.–19. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	2	47
20. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	2	45
21. <i>Jonáš Venc</i>	G, Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	37	2	39
22. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	2	38
23.–24. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	1	3	1	3	-	-	-	-	8	35	2	36
23.–24. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	2	36
25. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51	1	32
26. <i>Michal Kišš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	1	31
27.–29. <i>Lída Kačenková</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	1	30
27.–29. <i>Vojtěch Marek</i>	Biskupské G, Brno	-	3	-	-	-	-	10	-	13	83	1	30
27.–29. <i>Jiří Polách</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41	1	30
30.–31. <i>Mikuláš Fřála</i>	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	1	29
30.–31. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	1	29
32. <i>Václav Tichavský</i>	G Jana Nerudy, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	1	28
33. <i>Vojtěch Haslinger</i>	G, Lovosice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	1	25

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“%	Σ	
		3	3	6	7	8	10	13	10	60	100	16	300
34.–35. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	1	21
34.–35. <i>Petr David Lanča</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	3	–	–	–	–	2	–	–	5	43	1	21
36. <i>Karolína Žídková</i>	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	1	20
37.–38. <i>Josef Ferda</i>	G dr. A. Hrdličky, Hum- polec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	1	17
37.–38. <i>Viliam Geffert</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	1	17
39. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	4	3	–	–	–	–	–	–	7	107	0	16
40.–41. <i>Vojtěch Lančarič</i>	SPŠ Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	0	14
40.–41. <i>Jakub Petrovický</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	0	14
42. <i>Mikuláš Sulovský</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	0	13
43.–45. <i>Barbora Čemanová</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	0	12
43.–45. <i>Zdeněk Hartman</i>	G, Broumov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	0	12
43.–45. <i>Štěpán Šmětka</i>	Letohradské soukromé gymnázium L	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30	0	12
46.–47. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	0	11
46.–47. <i>Dávid Jopek</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	0	11
48.–49. <i>Patrik Bašo</i>	G Ludovíta Štúra, Tren- čín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	0	10
48.–49. <i>Anna Vodáková</i>	G, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	10
50. <i>Šimon Bízek</i>	G Na Pražačce, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	15	0	9
51.–53. <i>Matej Donoval</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	8
51.–53. <i>Matěj Olič</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	8
51.–53. <i>Michaela Valtrová</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	0	8
54.–55. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	0	7
54.–55. <i>Jan Tomšej</i>	G P. Bezruče, Frýdek- Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	0	7
56. <i>Tomaš Názler</i>	SPŠ a VOŠT Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	0	6
57.–58. <i>Karolína Prasková</i>	Masarykova sš zeměděl- ská a voš O	–	–	–	–	–	–	–	–	–	12	0	5
57.–58. <i>Nikita Zykov</i>	G Na Pražačce, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	5
59.–62. <i>Bogdans Grebņevs</i>	Riga Tech. Univ. Engin. HS, LV	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	4
59.–62. <i>Martina Plevová</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	0	4
59.–62. <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	4
59.–62. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	4
63. <i>Jan Petkov</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
64.–65. <i>Marek Plachý</i>	G, Jateční, Ústí nad La- bem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	2
64.–65. <i>Michal Puš</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	2
66. <i>Filip Msallam</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	1
67. <i>Vojtěch Svoboda</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“%	Σ	
		3	3	6	7	8	10	13	10	60	100	16	300
1. <i>Filip Vrto</i>	G J. Škody, Přerov	3	4	2	1	2	7	13	–	32	69	10	187
2. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	3	3	3	7	9	–	–	–	25	93	9	167
3. <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	4	4	6	7	4	–	–	–	25	81	7	131
4. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	7	125
5. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	99	5	104

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>10</i>	<i>13</i>	<i>10</i>	<i>60</i>	<i>100</i>	<i>16</i>	<i>300</i>
6. <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	4	-	-	-	-	-	-	4	77	5	103
7. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	4	86
8. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	4	85
9. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	4	80
10. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	-	3	-	-	-	-	-	-	3	64	4	77
11. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	4	72
12. <i>Daniël Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	4	71
13. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	3	60
14. <i>David Juda</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	3	58
15. <i>Aneta Píková</i>	G, Strakonice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	3	54
16. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	-	4	-	-	-	-	-	-	4	52	2	52
17. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51	2	51
18. <i>Pavčina Závřelová</i>	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	2	46
19. <i>Nicolas Gavorník</i>	G, Myjava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	2	45
20. <i>Dávid Brodňanský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94	1	34
21. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	1	30
22.–23. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	1	22
22.–23. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	1	22
24. <i>Jakub Maťa</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	1	21
25. <i>Matěj Mocek</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	1	20
26.–28. <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	1	18
26.–28. <i>Jiří Harvalík</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	1	18
26.–28. <i>Karel Podzimek</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	1	18
29. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1	17
30. <i>Matěj Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	0	16
31. <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	0	15
32.–33. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35	0	14
32.–33. <i>Adam Húštava</i>	European School Luxembourg II	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	0	14
34. <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	0	13
35. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	0	10
36. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	0	8
37.–38. <i>Marie Jankolová</i>	G Botičská, Praha	-	3	-	-	-	2	-	-	5	44	0	7
37.–38. <i>Michal Šrank</i>	Gymnázium Angely Merici	-	-	-	-	-	-	-	-	-	44	0	7
39.–44. <i>Jozef Mičáň</i>	G Grösslingová, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
39.–44. <i>Jozef Mičáň</i>	G Grösslingová, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
39.–44. <i>Matouš Novotný</i>	G, Křenová, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	0	3
39.–44. <i>Lukáš Ščerbanovský</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
39.–44. <i>Jakub Šimek</i>	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
39.–44. <i>Michal Uliáš</i>	Smíchovská SPŠ Praha 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz



@FYKOS



@fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.