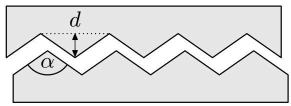
Úloha II.3 ... model tření

6 bodů; průměr 4,23; řešilo 71 studentů

Jaký by byl statický koeficient tření mezi tělesem a podložkou, pokud bychom uvažovali model, ve kterém jsou na povrchu obou těles klínky o vrcholovém úhlu α a výšce d? Zkuste porovnat vaše výsledky a reálné koeficienty tření.



Karel se inspiroval u KorSemu.

Statický koeficient tření f je definován jako podíl statické třecí síly F_t, která působí proti směru pohybu, ku normálové tlakové síle F^n působící na dané těleso

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{F^\mathrm{n}}\,.$$

V našem modelu musíme najít tyto síly a pomocí nich vyjádřit f. Začíná-li těleso v klidu, působí na něj pouze tíhová síla F_g. Abychom jej uvedli do pohybu, začneme na něj působit silou F v horizontálním směru.

Stykové plochy tvoří jednotlivé zuby, které zjednodušeně představují nakloněnou rovinu. My se zaměříme pouze na jednu takovou „nakloněnou rovinu“. Na ni působí kolmo na sebe dvě síly

$$\frac{F_g}{N} \quad \text{a} \quad \frac{F}{N}\,,$$

kde N představuje počet stykových ploch (zubů), mezi které se síly dělí. Síly rozdělíme na složky normálové a tečné stejně jako na nakloněné rovině pod úhlem $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$$F_g^\mathrm{n} = \frac{F_g}{N}\cos\beta\,, \quad F^\mathrm{n} = \frac{F}{N}\sin\beta\,,$$
$$F_g^\mathrm{t} = \frac{F_g}{N}\sin\beta\,, \quad F^\mathrm{t} = \frac{F}{N}\cos\beta\,.$$

Má-li se těleso uvést do pohybu, musí se tečná složka námi působené síly F^t vyrovnat tečné složce tíhové síly F_g^t

$$\frac{F}{N}\cos\beta = \frac{F_g}{N}\sin\beta\,,$$
$$F\sin\frac{\alpha}{2} = F_g\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Při úpravě jsme použili identitu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Doteď jsem se zaměřovali na jednotlivé zuby, ty jsou ale v porovnáním s celým tělesem „zanedbatelně“ malé. Z makroskopického hlediska se nám povrch může jevit hladce a samotná tíhová síla se nám jeví jako tlaková normálová síla, platí tedy $F_g \approx F^\mathrm{n}$. Stejně tak se nám tečná složka tíhové síly jeví jako třecí síla vzdorující pohybu, kterou musíme překročit působením horizontální síly, tudíž $F' \approx F^\mathrm{t}$.

Úspěšně se nám podařilo vyjádřit jednotlivé síly. Finální úpravou získáme

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{F^\mathrm{n}} \approx \frac{F'}{F_g} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,,$$
$$f \approx \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

Vyšlo nám, že koeficient statické třecí síly závisí pouze na úhlu α, a nikoli na výšce zubu či hmotnosti tělesa, což odpovídá i reálné situaci. Úhel α nás zajímá v rozsahu $\langle 0, \pi \rangle$. Při překročení těchto mezí se situace začne zrcadlit.

Nyní se podíváme na krajní situace. Při $\alpha \approx 0$ jsou zuby extrémně ostré a koeficient se limitně blíží nekonečnu. Naopak, pokud se $\alpha \approx \pi$, zuby prakticky vymizí a styková plocha je rovná, třecí síla je tudíž nulová.

V reálném světě se setkáváme s koeficienty statického tření převážně v rozmezí $\langle 0, 1 \rangle$, těm odpovídá úhel α_r v rozmezí $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right)$. Avšak i koeficienty tření větší než 1 existují, zajímavým příkladem je svařování za studena. Při tomto procesu se spojují dva objekty ze stejného materiálu (nejčastěji kovy) bez použití svařovacích aditiv. Atomy na dotykové ploše „neví“, k jaké části desek patří, a proto mohou přilnout k sobě.

Patrik Kašpárek
patrik.kasparek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.