Úloha III.5 ... kovářská

10 bodů; průměr 4,94; řešilo 36 studentů

Skřítci se rozhodli ukovat další magický meč. Vyrábějí jej z tenké kovové tyče o poloměru $R = 1\,\mathrm{cm}$, na jejímž jednom konci udržují teplotu $T_1 = 400\,^\circ\mathrm{C}$. Tyč je obklopena obrovským množstvím vzduchu o teplotě $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Součinitel přestupu tepla onoho bájného kovu je $\alpha = 12\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ a koeficient tepelné vodivosti má hodnotu $\lambda = 50\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Tyč na výrobu meče je velmi dlouhá. Kde nejblíže zahřívanému konci mohou skřítci tyč chytit holýma rukama, nemá-li teplota v místě doteku překročit $T_2 = 40\,^\circ\mathrm{C}$? Proudění vzduchu a tepelné záření neuvažujte.

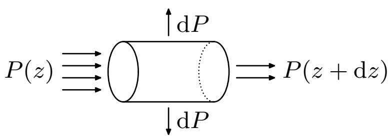
Matěj Rzehulka si spálil prsty o kov.

Pro popis tyče zvolíme válcové souřadnice, jejichž osa z bude rovnoběžná s osou tyče. První konec (s teplotou T_1) umístíme do počátku, druhý někam v kladném směru osy z. Zadání po nás chce najít závislost teploty na vzdálenosti $T(z)$. Díky předpokladu tenké tyče můžeme uvažovat, že teplota opravdu závisí jen na z.[1]

Podívejme se na bilanci energie v libovolném úseku tyče (viz obrázek 1). Hustotu tepelného toku v axiálním směru q_a odvodíme z Fourierova zákona vedení tepla

$$q_\mathrm{a} = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,.$$

Vztah říká, že teplo v pevných látkách poteče ve směru největšího poklesu teploty, což lze intuitivně očekávat na základě 2. termodynamického zákona (teplo se samovolně nešíří z chladnějšího tělesa na teplejší). Konstantu úměrnosti λ lze chápat jako množství tepla, které projde stěnou jednotkové plochy a tloušťky za čas 1 s, pokud je rozdíl teplot na jejích okrajích 1 K.



Obr. 1: Úsek tyče od z po $z + \mathrm{d}z$. Z předchozího úseku do něj teče výkon $P(z)$, do následujícího pokračuje $P(z + \mathrm{d}z)$ a přes rozhraní se vzduchem uniká $\mathrm{d}P$.

Výkon, procházející kolmým řezem tyčí ve vzdálenosti z, bude

$$P(z) = Sq_\mathrm{a}(z) = -\pi R^2 \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z) = -\pi R^2 \lambda T'(z)\,.$$

Při infinitezimálním posunu podél tyče o $\mathrm{d}z$ se výkon změní na $P(z + \mathrm{d}z) = -\pi R^2 \lambda T'(z + \mathrm{d}z)$. Přestup tepla mezi dvěma látkami (zde z kovu do vzduchu) lze popsat Newtonovým vztahem

$$\mathrm{d}P = \alpha\,(T - T_0)\,\mathrm{d}S = 2\pi\alpha\,(T - T_0)\,R\,\mathrm{d}z\,,$$

kde T_0 značí teplotu *dostatečně daleko* od tyče, kde již teplota není tyčí ovlivněna.

Tento vztah je jen zjednodušením – v reálném případě bychom museli modelovat přirozené proudění vzduchu okolo horkého válce, což by bez počítače téměř nešlo. Zde jej „skryjeme“ do konstanty α a složitý průběh teploty nahradíme teplotou T_0.

[1] Kdyby tyč nebyla tenká, museli bychom uvažovat, že teplota závisí ještě na vzdálenosti od osy r. Teplota by zřejmě směrem ven klesala, protože tyč je na okrajích chlazena vzduchem.

Jelikož předpokládáme ustálený stav, energie se nemůže nikde hromadit. To znamená, že výkon, který do úseku teče, z něj musí také vytékat

$$P(z) = P(z + \mathrm{d}z) + \mathrm{d}P\,.$$

Druhý člen v rovnici přesuneme na levou stranu a za všechny členy dosadíme

$$-\pi R^2 \lambda \left(T'(z) - T'(z + \mathrm{d}z)\right) = 2\pi\alpha \left(T - T_0\right) R\,\mathrm{d}z\,,$$
$$\frac{T'(z + \mathrm{d}z) - T'(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\pi\alpha}{R\lambda}\left(T - T_0\right)\,.$$

Ve výrazu na levé straně ihned poznáváme vzorec pro druhou derivace funkce T', neboli T''. Tím jsme získali diferenciální rovnici pro $T(z)$, kterou už stačí jen vyřešit. Pro zjednodušení použijeme substituci $t = T - T_0$. Zřejmě $t'' = T''$, takže máme

$$t'' = \frac{2\pi\alpha}{R\lambda} t = ct \quad \Rightarrow \quad t'' - ct = 0\,, \tag{1}$$

kde jsme všechny parametry schovali do konstanty c.

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom je

$$\kappa^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \sqrt{c}\,,$$

řešení hledáme ve tvaru

$$t = A\mathrm{e}^{\kappa z} + B\mathrm{e}^{-\kappa z} \quad \Rightarrow \quad T = t + T_0 = A\mathrm{e}^{\kappa z} + B\mathrm{e}^{-\kappa z} + T_0\,.$$

Neznáme konstanty určíme z okrajových podmínek. V počátku je teplota T_1 čili platí

$$T_1 = T(z = 0) = A + B + T_0\,.$$

Naopak *velmi daleko* se teplota tyče vyrovná s teplotou vzduchu, která je konečná

$$\lim_{z\to\infty} T(z) = T_0 \quad \Rightarrow \quad B = 0\,.$$

Potom zřejmě $A = T_1 - T_0$. Kombinací obou podmínek dostáváme výsledný vztah

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda R}}z}\,,$$

ze kterého už stačí jen vyjádřit souřadnici, kde teplota klesne pod T_2

$$z_2 = \sqrt{\frac{\lambda R}{2\alpha}} \ln\left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right)\,.$$

Dosadíme-li do vztahu číselné hodnoty, vyjde $z_2 = 42{,}5\,\mathrm{cm}$.

Poznámka: Známe-li rovnici vedení tepla pro homogenní izotropní prostředí

$$\frac{\lambda}{\rho c_p}\nabla^2 T + \frac{P_V}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t}\,,$$

můžeme rovnici (1) odvodit jednoduchým dosazením nulové pravé strany (protože jde o stacionární stav) a „záporného objemového zdroje tepla“

$$P_V = -\frac{q_\mathrm{n} S}{V} = -\frac{2\pi R l \alpha \left(T - T_0\right)}{\pi R^2 l} = -\frac{2\alpha \left(T - T_0\right)}{R} \,.$$

Matěj Rzehulka
`matej.rzehulka@fykos.cz`