

## Úloha IV.5 ... vrtulník

9 bodů; průměr 7,00; řešilo 30 studentů

Ptáka Fykosáka už unavovalo létat silou vlastních křídel, a proto začal přemýšlet o stavbě vlastního vrtulníku. Vytvořil si jednoduchý model nosného rotoru a chtěl zjistit, s jakou úhlovou frekvencí  $\omega$  se má skutečný rotor otáčet. Listy rotoru se zařezávají do vzduchu pod úhlem  $45^\circ$ . Molekuly vzduchu jsou jimi díky tomu odraženy přímo dolů, čímž vzniká tok hybnosti. Molekuly vzduchu považujte za původně nehybné a srážky s nosnou plochou za dokonale pružné.

Účinná část nosné plochy (tj. část skloněná pod úhlem  $45^\circ$  vůči vodorovnému směru) se nachází ve vzdálenosti  $r_1 = 50$  cm až  $r_2 = 6,00$  m od osy rotace, průmět listu rotoru do svislého směru má výšku  $h = 10,0$  cm. Fykosákův vrtulník bude mít čtyři takové listy.

Kolik otáček za sekundu musí rotor vykonat, aby se vrtulník o hmotnosti  $m = 2\,500$  kg právě udržel na místě? *Jindrovi bylo vedro, tak si stoupl pod vrtulník.*

Obvodová rychlost vrtule závisí na vzdálenosti od osy rotace, tím pádem na ni bude závislá i rychlost sestupného proudu vzduchu. Představme si infinitezimální válcový element vzduchu obepínající osu rotace ve vzdálenosti  $r$ . Výška tohoto elementu je  $h$  (stejná jako vertikální výška listu rotoru) a jeho radiální šířka je  $dr$ . Tento element vzduchu má hmotnost

$$dm = 2\pi\rho r h dr.$$

Otáčející se list rotoru pošle tento element vzduchu dolů rychlostí  $v = \omega r$ . Perioda rotoru je  $T = 2\pi/\omega$ . Hybnost tohoto elementu letícího dolů je

$$dp = v dm = 2\pi\rho\omega h r^2 dr,$$

přičemž se tento děj odehraje za čas  $T$ , takže na vrtulník působí element reakční síly směrem nahoru

$$dF_1 = \frac{dp}{T} = \frac{\omega dp}{2\pi} = \rho\omega^2 h r^2 dr.$$

Vztlaková síla působící na vrtulník od jednoho listu rotoru je

$$F_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho\omega^2 h r^2 dr \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{1}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Rotor má  $N = 4$  listů, takže celková vztlaková síla je

$$F = \frac{N}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Jestliže se má vrtulník tak akorát udržet ve vzduchu, musí být vztlaková síla rovna tíhové

$$F = mg,$$

kde  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup> je tíhové zrychlení. Úhlová frekvence rotoru tak musí být

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg}{N\rho h (r_2^3 - r_1^3)}}.$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání a hustoty vzduchu  $\rho = 1,29$  kg·m<sup>-3</sup> dostáváme

$$\omega = 25,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Počet otáček za sekundu je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,09 \text{ Hz}.$$

Rotor musí vykonat 4,09 otáček za sekundu, aby se vrtulník udržel na místě.

*Jindřich Jelínek*  
jjelinek@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.