

Úloha IV.E ... užitečná mince

12 bodů; průměr 7,83; řešilo 36 studentů

Změřte alespoň tři fyzikální vlastnosti nejmenší platné mince měny státu, ve kterém žijete. Makroskopické rozměry považujeme za jednu veličinu. Hodnotíme nejen přesnost měření a podrobnost popisu, ale i originalitu při výběru veličin.

Karel chtěl, aby účastníci pozorovali peníze.

Teorie

V této úloze se budeme zabývat charakteristikami českých jednorunových mincí, pro mince jiné nominální hodnoty či měny by však měření probíhala obdobně.¹ První důležitou částí úlohy je samozřejmě výběr veličin, které budeme měřit. Možností je velmi mnoho, ať už nás zajímají vlastnosti tepelné, elektrické, optické či mechanické. Mnoho z nich by však vyžadovalo použití nákladného laboratorního vybavení, které není samozřejmostí. V tomto řešení se proto zaměříme především na vlastnosti mechanické, a to konkrétně makroskopické rozměry a objem, hmotnost, hustotu a moment setrvačnosti. K těmto veličinám přidáme ještě jednu, jejíž měření je náročnější, leč stále proveditelné, a to tepelnou kapacitu.

Pro měření makroskopických rozměrů využijeme posuvného měřítka. Jedná se o měření přímé, o to více tedy budeme dbát na kvalitu jeho provedení. Při opakování měření použijeme různé mince – jednak se tak vyhneme chybě, kdy by na minci například byla vada či nečistota, ale také tím ověříme, že je rozumné mince považovat za identické. Zjišťovat budeme dva parametry, a to poloměr mince d a její tloušťku h . Můžeme předpokládat, že mince je válec, jehož objem určíme pomocí vzorce

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Víme však, že se nejedná o válec dokonalý. Tento odhad tedy porovnáme s přímým měřením. To provedeme tak, že do odměrného válce nalijeme dobře definované množství vody, přisypeme co nejvíce mincí, zjistíme rozdíl ve výšce hladin a vypočítáme jejich objem. Vyšší přesnosti můžeme dosáhnout, máme-li k dispozici přesnou pipetu. V takovém případě nalijeme do válce vodu přesně po některou z rysek, přisypeme mince a pomocí pipety odebereme (a tím naměříme) vodu tak, aby sahala opět přesně po danou rysku. V tomto řešení budeme využívat právě metodu s pipetou.

Hmotnost mince změříme opět přímo pomocí váhy. Je dobré si pamatovat, že nemáme-li k dispozici přesnou váhu, můžeme vyšší přesnosti dosáhnout použitím většího množství mincí. Známe-li hmotnost i objem mince, dokážeme určit její hustotu jako

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Další měřenou veličinou je moment setrvačnosti J , konkrétně moment setrvačnosti vzhledem k ose mince. Aby bylo měření v domácích podmínkách technicky proveditelné, provedeme na několika místech předpoklad, že mince je dokonalý válec. Hodnotu J zkusíme také vypočítat ze vzorce²

$$J = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{4},$$

¹Jistým předpokladem je tedy že je mince kulatá a homogenní – například dánské koruny mají uprostřed zpravidla díru a mince Eura nebo česká padesátikoruna jsou vyrobeny ze dvou různých materiálů, padesáticpencová mince je výrazně sedmiúhelníková... U takovýchto mincí by bylo třeba upravit jistě předpoklady.

²https://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrva%C4%8Dnosti

oba výsledky pak porovnáme. Využijeme k tomu metodu kyvů, kdy minci zavěšíme ve výšce l nad jejím hmotným středem, mírně vychýlíme a následně změříme dobu kyvu T . Moment setrvačnosti určíme jako³

$$J = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right).$$

Experiment provedeme tak, že na obvod mince kapkou lepidla z tavné pistole přilepíme nit, za kterou minci v požadované výšce pověšíme (výška l je rovna součtu délky nitě a poloměru mince – zde předpokládáme, že mince je válcem, jehož těžiště leží v jeho středu.)

Poslední měřenou veličinou je tepelná kapacita. K jejímu zjištění potřebujeme kalorimetr, který není složité si doma vyrobit. Jde především o to, abychom měli co nejlépe odizolovanou nádobu o známé tepelné kapacitě, čehož lze dosáhnout jednoduše – vložíme malou zavařovací sklenici do izolačního materiálu (např. polystyrenem) vystlané PET lahve, jejíž vrchol jsme předtím odřízli jako jistou pokličku.⁴ Takto vyrobený kalorimetr musíme nejdříve zkalibrovat, tedy například do kalorimetru o známé (pokojové) teplotě t_{kalor} nalít dobře definované množství vody o jiné známé teplotě t_v a změřit, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí. Pro výpočet kapacity kalorimetru C lze použít vzorec

$$C = \frac{(t_{\text{end}} - t_v) c_v m_v}{t_{\text{kalor}} - t_{\text{end}}},$$

kde $c_v = 4182 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody a m_v množství vody do kalorimetru nalité. Při měření měrné tepelné kapacity mincí do kalorimetru nalijeme ohřátou vodu o teplotě t_v a hmotnosti m_v , změříme, na jaké teplotě t_K se celý systém ustálí, a následně do něj vložíme mince o známé teplotě t_m (nejjednodušší je vybrat teplotu pokojovou nebo teplotu $T = 0^\circ\text{C}$, které dosáhneme ve vodě s rozpouštějícím se ledem) a hmotnosti m_m . Opět změříme, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí, a výslednou měrnou tepelnou kapacitu mincí c_m pak určíme pomocí rovnice pro teplo (nesmíme zapomenout zahrnout všechny části systému)

$$c_m = \frac{(t_K - t_{\text{end}})(C + c_v m_v)}{(t_{\text{end}} - t_m) m_m}.$$

Výsledky měření

Naměřené hodnoty průměru d , výšky h , objemu V a hmotnosti m jsou uvedeny v tabulce 1. Ve sloupci pro objem jsou hodnoty naměřené pro dvacet mincí, hmotnost byla měřena pro deset mincí. V předposledním řádku je uvedena vypočtená průměrná hodnota, v posledním příslušná směrodatná odchylka.

Všechny naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou použitého měřidla. Pro průměr d a tloušťku h to je $\sigma_{\text{posuv}} = 0,05 \text{ mm}$, pro hmotnost $\sigma_{\text{váha}} = 0,01 \text{ g}$ a pro objem $\sigma_{\text{pipeta}} = 0,1 \text{ ml}$. Pro určení výsledné odchylky σ zkombinujeme tuto systematickou chybu σ_B s nalezenou směrodatnou odchylkou σ_A

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

³Tento vzorec byl odvozen z rovnice pro fyzické kyvadlo a Steinerovy věty.

⁴Velmi hezký návod lze nalézt např. na <http://fyzweb.cz/clanky/index.php?id=162>.

Tab. 1: Naměřené hodnoty d , h a $10m$.

	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{20V}{\text{cm}^3}$	$\frac{10m}{\text{g}}$
1	20,00	1,90	9,6	36,11
2	20,00	1,95	9,8	36,12
3	20,00	1,95	9,9	36,14
4	20,10	1,90	9,7	36,12
5	20,00	1,95	9,5	36,06
6	20,00	1,90	9,7	36,06
7	20,00	1,95	9,7	36,06
8	20,05	1,95	9,9	36,11
9	20,00	1,95	9,6	36,00
10	20,00	1,90	9,8	36,03
$E(x)$	20,02	1,93	9,72	36,08
$\text{var}(x)$	0,03	0,03	0,13	0,05

Výsledné hodnoty průměru, tloušťky a hmotnosti jedné mince jsou

$$d = 20,02(6) \text{ mm},$$

$$h = 1,93(6) \text{ mm},$$

$$V = 0,486(8) \text{ cm}^3,$$

$$m = 3,608(5) \text{ g}.$$

Z naměřených hodnot d a h můžeme vypočítat hodnotu objemu pro dokonale válcovitou minci. Tato hodnota je

$$V_{\text{teor}} = 0,61(2) \text{ cm}^3.$$

Chyba byla vypočítána ze zákona pro šíření nejistot⁵ jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{2V}{d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{V}{h}\sigma_h\right)^2}.$$

Pomocí naměřeného objemu a hmotnosti můžeme vypočítat hustotu mince

$$\rho = 7,4(1) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.$$

Chyba byla určena pomocí vzorce

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\rho}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\rho}{V}\sigma_V\right)^2}.$$

Při měření momentu setrvačnosti vůči hlavní ose byly použity tři délky závěsu (měřeno od středu mince k závěsnému bodu), a to $l_1 = 6,5 \text{ cm}$, $l_2 = 3,9 \text{ cm}$ a $l_3 = 1 \text{ cm}$. Se závěsy délek l_1 a l_2 bylo provedeno deset měření doby padesáti period, s nejkratším závěsem l_3 bylo z důvodu technické

⁵Viz např. https://fykos.cz/_media/rocnik30/serial/serial13.pdf.