Úloha VI.E ... minutovka

12 bodů; průměr 10,11; řešilo 37 studentů

Sestavte zařízení, které dokáže co nejpřesněji odměřit jednu minutu. Při konstruování nesmíte pro kalibraci používat žádné měřidlo času. Po sestavení použijte stopky na změření toho, jak je vaše minuta přesná.
Bonus Odměřte deset minut.

Matěj vždy dorazí na nádraží maximálně minutu před odjezdem vlaku. A to i když má vlak půl hodiny zpoždění.

Kyvadlo teoreticky

Asi nejpřirozenější volbou je měřit počet kyvů kyvadla. Tento způsob jsme vybrali, protože je oproti jiným způsobům lehce realizovatelný v domácím prostředí a lze ho jednoduše teoreticky popsat.

Pro jednoduchost se budeme snažit přiblížit se co nejblíže k modelu matematického kyvadla, tj. k hmotnému bodu na nehmotném závěsu délky[1] $l \doteq 89\,\mathrm{cm}$. Jako závaží použijeme petangovou kouli o poloměru $r \doteq 3{,}6\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m \doteq 0{,}71\,\mathrm{kg}$.

Začněme s druhou impulsovou větou

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(ml^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} = ml^2\ddot{\theta}\,,$$

kde θ je okamžitá úhlová výchylka kyvadla od svislého směru (dvě tečky nad proměnnou značí druhou časovou derivaci této proměnné) a M je celkový moment síly působící na kyvadlo. Na kyvadlo působí celkem tři síly – tíhová, odporová a síla závěsu, která ale nevstupuje do výpočtu momentu sil. Provedeme-li rozbor sil, zjistíme, že moment síly vytvořený tíhovou silou je roven

$$M_g = -mgl\sin(\theta)\ .$$

Budeme uvažovat pouze malé výchylky do 5°, lze tedy použít aproximaci $\sin(x) \approx x$. S odporovou silou to je složitější. O tom, jaký vzorec použít, rozhoduje, zda je kolem kyvadla laminární nebo turbulentní proudění vzduchu. To lze přibližně určit výpočtem Reynoldsova čísla

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho d u}{\mu} = \frac{\rho \cdot d \cdot \sqrt{2gl\left(1-\cos\theta_0\right)}}{\mu} \doteq 1\,300\,,$$

kde $\rho \doteq 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, d je tzv. charakteristický rozměr tělesa, který shora odhadneme průměrem koule $2r$, u je rychlost proudění, kterou dopočítáme pomocí zákona zachování energie.[2] Dále $\mu \doteq 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$ je dynamická viskozita vzduchu a $\theta_0 \doteq 5^\circ$ je počáteční výchylka.

Reynoldsovo číslo je bezrozměrná veličina, která nám pomáhá předvídat způsob proudění. Nízké Reynoldsovo číslo implikuje laminární proudění, vysoké naopak turbulentní. Jako hraniční hodnota se uvádí $\mathrm{Re} = 2\,000$, pracujeme tedy s laminárním prouděním a odporovou sílu můžeme počítat pomocí Stokesova zákona

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\mu r v = 6\pi\mu r l\dot{\theta}\,.$$

[1] Závěs má délku 85 cm, ale připočteme ještě poloměr koule r, takže se po zaokrouhlení dostaneme na 89 cm.
[2] Opět bereme maximální rychlost, kterou může kyvadlo mít.

Všimněme si, že odporová síla bude vždy působit kolmo na směr závěsu. Velikost momentu síly vyvolaného touto silou tedy spočteme jako

$$M_\mathrm{o} = F_\mathrm{o} l = 6\pi\mu r l^2 \dot{\theta}\,.$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici

$$M = M_\mathrm{o} + M_g\,,$$
$$ml^2\ddot{\theta} = -6\pi\mu r l^2\dot{\theta} - mgl\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{6\pi\mu r}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0\,.$$

Dostali jsme rovnici harmonického oscilátoru s tlumením. Ta obecně nemá jednoznačné řešení, pokud neuvedeme počáteční podmínky. Budeme uvažovat, že je kyvadlo v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ v klidu, vychýleno o úhel θ_0 od svislého směru. Za těchto podmínek dostaneme jednoznačné řešení[3]

$$\theta(t) = \theta_0 \mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mu r}{m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{3\pi\mu r}{m}\right)^2}\,t\right)\,.$$

Kyvadlo tedy bude kmitat kolem své stabilní polohy podle očekávání, avšak amplituda kmitů bude vlivem tření exponenciálně klesat. Dosaďme do exponenciály čas deseti minut

$$\mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mu r}{m}\cdot 600\,\mathrm{s}} \doteq 99{,}5\,\%\,.$$

Můžeme vidět, že během desetiminutového měření se amplituda vlivem odporových sil prostředí prakticky nezmění. Dále po dosazení zjistíme, že

$$\frac{g}{l} \gg \left(\frac{3\pi\mu r}{m}\right)^2\,.$$

Člen na pravé straně nerovnosti proto můžeme zanedbat. Dostáváme tak

$$\theta(t) \doteq \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\,.$$

Jinými slovy, na odporu vzduchu vůbec nezáleží.

Perioda kyvadla bude

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

takže pro počet kmitů za čas t dostaneme

$$N_\mathrm{kmit} = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Jelikož však budeme počítat kyvy,[4] výsledný vzorec bude

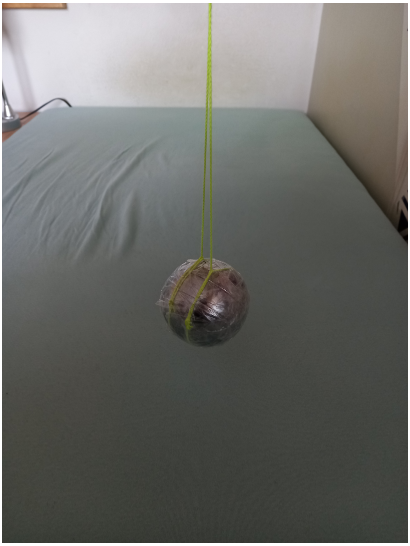
$$N_\mathrm{kyv} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

což nám dává přibližně 63 kyvů na jednu minutu a 634 kyvů na deset minut.

[3] Pokud sami neumíte řešit diferenciální rovnice, můžete na to použít nějaký software, např. Wolfram Alpha.
[4] Dva kyvy jsou jeden kmit.

Příprava experimentu a průběh měření

Jako závaží kyvadla jsme volili petangovou kouli a jako závěs dva provázky, protože mají oproti kouli zanedbatelnou hmotnost a můžeme použít model matematického kyvadla. Relativně vysoká hmotnost koule zároveň potlačila vliv odporu prostředí. Kouli jsme pomocí nemalého množství izolepy připevnili k provázkům. Kyvadlo jsme následně přivázali k madlu skříně. Bylo třeba smyčku zajistit izolepou, aby se závěs neprotáčel, a přilepit dvířka od skříně, protože by je kývání mohlo rozhýbat.



Obr. 1: Fotka z měření.

Pro měření jsme si naprogramovali stopky. S prvním stiskem klávesy začnou měřit a s každým dalším přidají číslo a čas záznamu. Kyvadlo jsme vychýlili zhruba o $d = l\sin(5^\circ) \doteq 8\,\mathrm{cm}$ a nechali ho volně kývat. Při prvním průletu stabilní polohou jsme spustili stopky a při každém dalším jsme provedli záznam. Takto jsme naměřili 634 kyvů odpovídajících času 10 minut.

Oproti běžným stopkám v mobilu nám tyto stopky ulehčí práci tím, že počítají kyvy za nás a umožňují export dat pro jejich další analýzu.

Výsledky měření

Jak si později ukážeme, můžeme na desetiminutové měření nahlížet jako na deset nezávislých minutových měření. Celé měření si rozdělíme na deset úseků, každý 63 kyvů dlouhý.

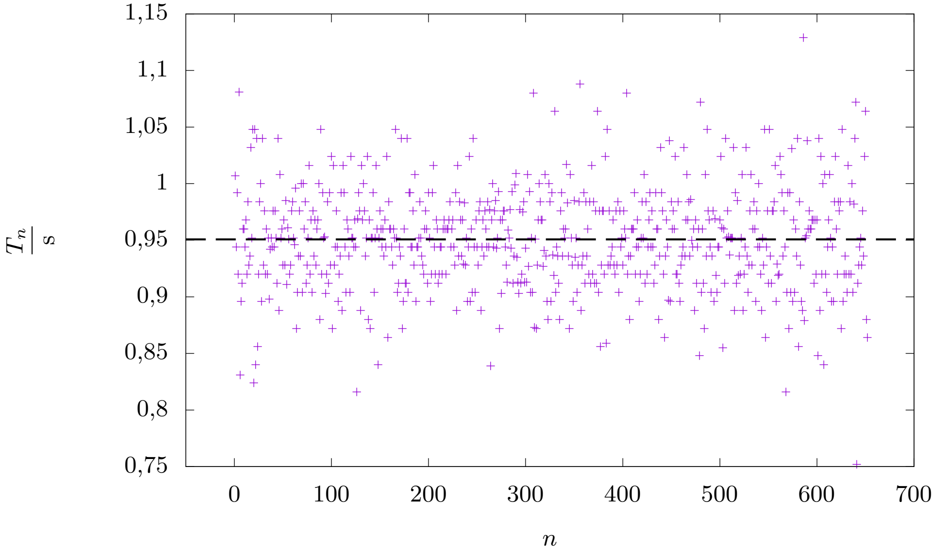
Dobu 634 kyvů jsme změřili jako 602,8 s. Pokud provedeme statistiku na naměřená data, získáme výsledek

$$(59{,}90 \pm 0{,}02)\ \mathrm{s}\,,$$

což nám dává reletivní odchylku v případě jednominutového měření přibližně 0,2 % a v případě desetiminutového měření odchylku 0,5 %.

Tab. 1: Naměřené délky minuty

N	$\frac{T_{\mathrm{min}}}{\mathrm{s}}$
1	60,0
2	59,8
3	60,0
4	59,9
5	59,9
6	59,8
7	60,1
8	59,8
9	60,1
10	59,7



Obr. 2: Změřená doba n-tého kyvu.

Během měření jsme změřili délku jednotlivých kyvů. Pokud do grafu vyneseme změřenou dobu n-tého kyvu a proložíme ji lineární funkcí (horizontální černá čára v grafu č. 2), bude tato funkce tvaru

$$T_n \doteq \left(-8 \cdot 10^{-7} n + 0{,}9\right)\,\mathrm{s}\,.$$

Lze vidět, že po dobu desetiminutového měření se průměrná délka kyvu prakticky nezměnila a lze tedy brát desetiminutové měření jako deset nezávislých minutových měření.

Diskuse

Délku minuty se nám podařilo změřit celkem přesně, ale mohlo by nás zarazit, že doba 60 s nespadá do námi stanovené odchylky. Mohli bychom to svést na statistickou chybu – říct, že se jednalo o výjimečný případ, ale lze spočítat, že takto velká výchylka od změřeného průměru nebo větší může nastat s pravděpodobností řádově[5] 10^{-5} %. Příčinou této nesrovnalosti je fakt, že neměříme dobu jedné minuty, ale dobu 63 kyvů, která je $T = 63\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 59{,}94\,\mathrm{s}$. Stejná pravděpodobnost pro tuto hodnotu se již pohybuje řádově v procentech.

Tuto chybu bychom mohli napravit vhodnou délkou závěsu kyvadla. Pro 63 kyvů tuto délku spočteme jako

$$63\pi\sqrt{\frac{l_{63}}{g}} = 60\,\mathrm{s}\,,$$
$$l_{63} \doteq 90{,}2\,\mathrm{cm}\,,$$

což vysvětluje, proč jsme změřili minutu tak přesně. Ideální délka se od té naší liší řádově o milimetry. Taková přesnost není v našich podmínkách jednoduše dosažitelná, protože provázek se vlivem tíhy koule může natáhnout.

Práve pružnost provázku mohla být dalším zdrojem chyby. Pohyb hmotného závaží po zakřivené trajektorii vyvolával v provázku pnutí, jež ho natahovalo, což ovlivňovalo délku periody. Tuto chybu jsme mohli odstranit např. použitím pevného závěsu.

Během experimentu jsme si mohli povšimnout, že se kyvadlo nekývalo v jedné rovině, tudíž na něj musely působit další síly, které jsme nezapočítali. Předpokládáme však, že tyto síly neměly na průběh experimentu zásadní vliv.

Závěr

S pomocí kyvadla se nám podařilo změřit doby jedné minuty a deseti minut.

Jan Benda
`honzab@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[5] Jelikož známe střední hodnotu a směrodatnou odchylku měření, můžeme tyto pravděpodobnosti spočítat skrze normální rozdělení.