

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

první série je již za námi, a to s rekordní účastí 230 řešitelů, což je nejvíce za posledních 20 let a druhý nejvyšší výsledek v celé historii FYKOSu. Děkujeme za vaši přízeň a doufáme, že s námi vydržíte i v dalších sériích. V této brožurce naleznete zadání 2. série, ve které poradíte Jardovi, jak moc může otevřít notebook v autobuse, jak se musí chovat jeřáb na voru nebo jaké jsou podmínky pro to, aby planeta mohla udržet atmosféru.

V nedávné době také proběhlo podzimní soustředění, které se letos konalo v Kořenově v Jizerských horách. Účastníci byli pozváni na cestu kolem světa, kterou zahájili prvním dnem v Egyptě, avšak při dalším přesunu byli uneseni a ocitli se tak v totalitní zemi jménem Fykorea uctívající osobnost Vůdce. Kromě toho zažili účastníci spoustu zábavných her i přednášek z fyziky a příbuzných oborů. Pokud máte zájem se zúčastnit příštího, jarního, soustředění, máte šanci se na něj dostat za řešení prvních tří sérií FYKOSu.

Mimo soustředění pořádáme i další akce. Tou nejbližší akcí je Den s experimentální fyzikou (DSEF)¹, který se koná 7. 11. v Praze a čeká na vás množství exkurzí po pracovištích na MFF i jinde.

Dále, v nejbližší době pořádáme týmovou soutěž Fyziklání Online², která se uskuteční 23. listopadu. Registrovat se může libovolný tým maximálně pěti lidí, (kteří mohou být studenty různých škol) a v kategorii Open se mohou zúčastnit i týmy složené ze starších lidí než studentů, můžete se tedy utkat se svými rodiči či učiteli.

Další týmovou soutěží, která nás čeká, je Fyzikální Náboj³, který se uskuteční 4. listopadu v Praze a v Ostravě.

Těšíme se na vás

Organizátoři FYKOSu



Zadání II. série

Termín uploadu: 22. 11. 2022 23.59

Termín odeslání: 21. 11. 2022

Úloha II.1 ... žlab na vodu

3 body

Žlabem na vodu obdélníkového průřezu o šířce $d = 10$ cm teče voda. Na její hladinu spadne malý list, který se začne pohybovat rychlostí $60 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Výška vody ve žlabu je $h = 1,3$ cm. Odhadněte, jak dlouho bude trvat nabrat 50 l vody do připraveného vědra. Komentujte použité předpoklady proudění v porovnání s reálnou situací.

¹<https://dsef.cz>

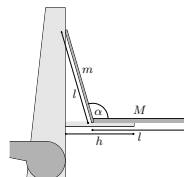
²<https://online.fyziklani.cz>

³<https://physics.naboj.org>

Úloha II.2 ... nepohodlný autobus

3 body

Jarda chtěl v autobuse sledovat na svém notebooku přednášku, a proto ho položil na výklopnou policičku sedadla před ním. Ta má hloubku $h = 18$ cm a je kolmá ke svislému sedadlu. Jardův notebook, široký $l = 25$ cm, se skládá ze spodní části o hmotnosti $M = 1\,200$ g a z obrazovky o hmotnosti $m = 650$ g. Obě části považujeme za homogenní. Na jaký největší úhel může notebook rozevřít, aby nespadl z policičky?

**Úloha II.3 ... jeřáb na voru**

6 bodů

Uprostřed řeky stojí na voru o zanedbatelné hmotnosti jeřáb a přemísťuje krabice stavebního materiálu o hmotnosti m z jednoho břehu na druhý. V jednom kroku jeřáb naloží materiál na jedné straně řeky, otočí se na druhou stranu, tam materiál vyloží a otočí se zpět. Určete nejmenší hodnotu úhlu, o který se může během jednoho kroku vor vychýlit oproti původní pozici. Jeřáb aproximujeme homogenním válcem o hmotnosti M_j a poloměru r a otáčecím ramenem tvaru tenké tyče o délce kr . Rychlost řeky i „tření“ mezi vorem a vodou zanedbejte.

Úloha II.4 ... rovnoběžná srážka

6 bodů

Pták Fykosák sleduje, jak se kolem něj v jeho inerciální vztažné soustavě po rovnoběžných trajektoriích pohybují konstantními nerelativistickými rychlostmi dva hmotné body. Stejně jako on najdete odpověď na otázku, jestli se pro nějakého jiného inerciálního pozorovatele můžou tyto trajektorie protnout. Pokud ano, je možné, aby se dané hmotné body při správných počátečních podmínkách srazily v tomto průsečíku? Je to konzistentní s tím, že podle Fykosáka se pohybují paralelně?

Úloha II.5 ... kouzelná magnetická tyčka

10 bodů

Mějme tenký magnet uzavřený uprostřed tenké duté tyče o délce l . Materiál tyče je schopný magnetické pole odstiňovat. Těsně za konci tyče je tok magnetického pole roven Φ . Vypočítejte velikost a směr magnetické indukce v rovině kolmé na tyč procházející jejím středem v závislosti na vzdálenosti r od tyče.

Úloha II.P ... planetární atmosféra

10 bodů

Jaké parametry musí mít planeta, aby si udržela atmosféru srovnatelnou se Zemí? Jaké podmínky jsou nutné, aby takovou atmosféru získala?

Úloha II.E ... reproduktor

12 bodů

Naměřte závislost hladiny intenzity zvuku vydávaného vaším reproduktorem/mobilem/počítačem na vzdálenosti od zdroje. Určete také závislost hladiny intenzity na nastavení výstupní hlasitosti (tzv. volume). Nezapomeňte data fitovat.

Úloha II.S ... počítáme kvanta

10 bodů

- Najděte si molekulu betakarotenu a zkuste spočítat, jakou by měla mít barvu, respektive na jaké vlnové délce absorbuje. Použijte jednoduchý model nekonečné potenciálové jámy,

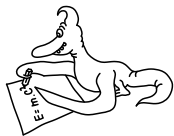
ve které jsou „uvězněny“ π elektrony z dvojných vazeb, tedy za každou dvojnou vazbu dva elektrony. Absorpce pak odpovídá takovému přechodu, že elektron přeskočí z nejvyšší obsazené hladiny na první neobsazenou. Srovnajte s experimentální hodnotou. Proč hodnota z našeho modelu nevychází tak, jak bychom chtěli? (5b)

2. Zkusme zlepšit náš model. Při studiu některých látek, především kovů či polovodičů, zavádíme efektivní hmotnost elektronu. Místo toho, abychom složitě popisovali prostředí, ve kterém se elektrony pohybují, se tváříme, že elektrony jsou lehčí nebo těžší než ve skutečnosti. Jakou by musely mít hmotnost, aby nám vyšla správná experimentální hodnota? Uveďte ji v násobcích hmotnosti elektronu. (2b)
3. Pokud vyrobíme mikroskopické kuličky (nanočástice) selenidu kadmnatého (CdSe) o velikosti 2,34 nm. Rozzáří se po ozáření UV světlem jasně zelenou barvou na vlnové délce 536 nm. Když je zvětšíme na velikost 2,52 nm, posune se vlnová délka vyzařovaného světla do žluté oblasti s vlnovou délkou 570 nm. Jakou velikost kuliček bychom potřebovali, aby vyzařovaly oranžově na vlnové délce 590 nm? (3b)

Nápověda CdSe je polovodič, má tedy plně obsazený elektronový pás, pak (úzký!) zakázaný pás a nakonec prázdný vodivostní pás. Tedy musíme uvažovat, že vyzařovaný foton odpovídá přeskoku z vodivostního pásu, kde jsou zase stavy známé z nekonečné potenciálové jámy, do obsazeného pásu. Všechny energie vyzařovaných fotonů tedy budou posunuty o neznámou konstantní hodnotu odpovídající šířce zakázaného pásu.

Bonus Nakonec pro ty, které by mrzelo, kdyby si nezaintegrovali – 1s orbital atomu vodíku má sféricky symetrickou vlnovou funkci s radiálním průběhem $\psi(r) = \frac{e^{-r/a_0}}{\sqrt{\pi a_0^3}}$, kde $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ je

Bohrův poloměr. Protože orbitály jakožto funkce tří prostorových proměnných by se nám špatně vykreslovaly, raději zobrazujeme oblast, ve které se bude elektron s velkou pravděpodobností vyskytovat. Jaký je poloměr sféry centrované na jádře, ve které se elektron bude vyskytovat s pravděpodobností 95 %? (+2b)



Řešení I. série

Úloha I.1 ... užitečné máslo

3 body; průměr 2,67; řešilo 220 studentů

Jarda se rozhodl upéct koláč, ale zjistil, že se v jeho kuchyňské váze vybila baterka a nemá jak odvážit 300 g mouky. Napadlo ho však, že může použít kostku másla, na které je napsáno, že má hmotnost $m = 250$ g. Naštěstí našel ještě vhodnou pružinu a stopky. Na velmi lehkou mističku nasypal hromádku mouky, připevnil na pružinu, rozkmital a změřil periodu $T_1 = 2,8$ s. To stejné udělal s kostkou másla a naměřil $T_2 = 2,3$ s. Poradte Jardovi, kolik mouky má přidat nebo odebrat.

Když Jardu vyhodí z Matfyzu, otevře si pekárnu.

Pro periodu kmitu mouky zavěšené na pružině platí známý vztah

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_m}{k}},$$

kde k je tuhost pružiny a m_m je hmotnost mouky. Analogicky lze periodu kmitu másla vyjádřit jako

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Rovnice podělíme, upravíme a dostaneme

$$m_m = m \frac{T_1^2}{T_2^2} \doteq 0,37 \text{ kg}.$$

Jarda tak musí 70 gramů mouky odsypat, než začne zpracovávat těsto.

Jaroslav Herman

jardah@fykos.cz

Úloha I.2 ... vážíme neznámý předmět

3 body; průměr 2,09; řešilo 152 studentů

Mějme ideální váhu, kterou zkalibrujeme státním etalonem o hmotnosti $m_e = 1,000\,000\,165$ kg a hustotě $\rho_e = 21\,535,40$ kg·m⁻³. Kalibraci myslíme to, že po položení etalonu na váhu přiřadíme naměřené hodnotě právě hmotnost m_e . Vážení neznámého předmětu pak provedeme za stejných podmínek, při kterých má objem $V_0 = 3,242\,27$ dl. Jestliže jsme navázili váhu $G = 1,420\,12$ N, jakou hmotnost jsme naměřili? Jaká je skutečná hmotnost předmětu? Experiment provádíme v místě s normálním tíhovým zrychlením $g = 9,806\,65$ m·s⁻² a hustotou vzduchu $\rho_v = 1,292\,23$ kg·m⁻³. Uvažujte, že kalibrace je lineární a že nezatížená váha ukazuje nulu.

Karel chtěl použít etalon.

Ještě než se pustíme do samotného řešení, zavedme následující značení veličin. Vždy bude existovat nějaká přesná síla, která působí na váhu, tu označíme F . Jako G potom označíme sílu, kterou v procesu vážení naměříme, jako M hmotnost, kterou naměříme, a nakonec m bude značit skutečnou hmotnost váženého předmětu. Při kalibraci váhy pak v podstatě stanovujeme závislost veličin G a M na síle F . Dále si uvědomme, že pro nezatíženou váhu i pro vážený etalon musí platit $M(F) = m(F)$. Z toho budeme vycházet při kalibraci.

Při řešení příkladu bude nyní naším úkolem najít vztahy mezi zmíněnými veličinami. Začneme konstatováním, že mezi skutečnou silou F a hmotností m vždy platí z Archimédova zákona následující vztah

$$\begin{aligned} F &= F_G - F_{vz}, \\ F &= (m - V\rho_v)g, \end{aligned} \quad (1)$$

kde V je objem váženého předmětu a ρ_v hustota vzduchu. Zbývá nám tedy najít vztahy mezi veličinami F a G a následně mezi G a M . Protože ale známe ze zadání pouze vztah mezi M_e a F_e (hodnotu G_e neznáme), musíme něco předpokládat.

Uvědomme si, co v našem případě znamená kalibrace. Měřicí přístroj velmi často funguje tak, že při měření nějaké veličiny přímo změří veličinu jinou a v závislosti na nějakých referenčních hodnotách určí vztah mezi těmito veličinami. Právě stanovení tohoto vztahu se nazývá kalibrace.

Máme dvě možnosti, jak příklad chápat. První možností je, že váha změří sílu přesně. Bude tedy v našem zavedeném značení platit $F = G$ a při kalibraci budeme hledat, jak na této síle závisí hmotnost. Váha v tomto případě uvnitř funguje jako dokonalý siloměr.

Druhou možností je, že váhu přímo ztotožníme se siloměrem, který teprve kalibrujeme. Budeme tedy při kalibraci hledat, jak závisí naměřená síla G na skutečné síle F a pro naměřenou hmotnost položíme $G = Mg$.

Tyto dvě možnosti si jsou na první pohled velmi blízké, ale ve skutečnosti se při procesu kalibrace jedná o velmi zásadní rozdíl a v obou případech budeme mít úplně jiné výsledky.

Obě možnosti při opravování považujeme za správné. Myslíme si ovšem, že první řešení má trochu blíže formulaci ze zadání, protože při druhém řešení je kalibrovaný přístroj přísně vzato siloměrem a při prvním řešení je kalibrovaný přístroj vahou.

Měřenou veličinou je hmotnost a přímo naměřenou veličinou je síla (kalibrace vah)

Máme přesně naměřenou sílu, která působí na váhu a podle informace ze zadání hledáme funkci $m(F) = kF + c$. Do této síly se promítá nejen hmotnost měřeného tělesa (zmenšená o určitý faktor, který je způsobený vztlakovou silou), ale navíc i sloupec vzduchu nad ní. Protože v nezátíženém stavu máme ovšem nulovou sílu, pak hledaný koeficient c musí být nutně nulový a silové působení sloupce vzduchu na váhu již nemusíme uvažovat.

V tomto případě je velmi jednoduché dopočítat skutečnou hmotnost předmětu – můžeme totiž rovnou vyjít z rovnice (1) a dostaneme

$$m = \frac{G}{g} + V_0\rho_v \doteq 145,231 \text{ g}.$$

Jaký bude rozdíl mezi touto skutečnou hmotností předmětu a hmotností, kterou navážíme pomocí nakalibrovaných vah? Bude dán tím, že váhy neumějí pracovat s objemem tělesa.

Označme G_e naměřenou váhu etalonu. Hledáme koeficient k z kalibrační rovnice. Potom budeme již schopni najít naměřenou hmotnost neznámého předmětu pomocí vztahu $M = \frac{G}{k}$.

Rovnici pro G_e sestavíme analogicky jako v předchozím případě a vyjde nám

$$G_e = V_e(\rho_e - \rho_v)g \quad \Rightarrow \quad G_e = m_e g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}\right).$$

Vidíme tedy, že $k = g(1 - \rho_v/\rho_e)$. Kalibrované váhy tedy budou ukazovat

$$M = \frac{G}{g\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}\right)} \doteq 144,821 \text{ g}.$$

Měřenou veličinou je síla, ze které dopočítáme hmotnost (kalibrace siloměru)

V tomto případě můžeme přímočaře ze zadání určit, jakou hmotnost jsme naměřili. Váhu totiž považujeme za (nepřesně) zkalibrovaný siloměr, proto máme pro naměřenou tíhu G naměřenou hmotnost

$$M = \frac{G}{g} \doteq 144,812 \text{ g.}$$

Nyní budeme chtít najít funkci $G(F) = k'F + c'$. Užitím stejných argumentů jako výše můžeme prohlásit, že $c' = 0$, a hledat dále pouze k' .

Při kalibraci etalonem položíme $G_e = m_e g$, což se ale liší od síly F_e , kterou znovu určíme z rovnice (1). Koeficient k' tedy určíme jako

$$k' = \frac{G_e}{F_e} = \frac{m_e g}{(m_e - V_e \rho_v) g} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}}.$$

Ještě jednou tedy vyjdeme z (1) a dostaneme

$$m = \frac{F}{g} + V_0 \rho_v = \frac{G}{gk'} + V_0 \rho_v = \frac{G}{g} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e} \right) + V_0 \rho_v \doteq 145,222 \text{ g.}$$

Závěr a několik poznámek

Všimněme si, že obě řešení pro stejnou sílu F dají úplně stejnou hmotnost M – výsledek úlohy je jiný jen proto, že se v obou případech liší naměřená síla G .

Uvědomme si také, že váhy mohou měřit přesně pouze pro tělesa, jejichž hustota je rovna hustotě etalonu. Je také nutné podotknout, že veškeré hodnoty byly uvedeny se zbytečně velkou přesností. Jednak je to kvůli efektu vztlakové síly, jednak bychom u takto přesného měření již pocítili dokonce i vliv proudů vzduchu v laboratoři a spoustu dalších efektů.

Lubor Čech

lubor.cech@fykos.cz

Vojtěch David

vojtech.david@fykos.cz

Adam Mendl

adam.mendl@fykos.cz

Úloha I.3 ... zavařujeme

6 bodů; průměr 5,06; řešilo 123 studentů

Do válcové sklenice o výšce $h = 7,0 \text{ cm}$ a vnitřním poloměru $r = 2,5 \text{ cm}$ nalijeme horkou meruňkovou marmeládu o teplotě $T_0 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$, zavřeme ji víčkem a necháme chladnout, přičemž mezi marmeládou a víčkem je ve sklenici trochu vzduchu. Víčko se může lehce promáčknot dovnitř, když na něj působí alespoň síla $F = 4 \text{ N}$. Při promáčknutí se ozve zvuk, který jsme slyšeli po čase $t_p = 30 \text{ min}$ od zavření skleničky. Jestliže marmeláda tuhne při teplotě $T_t = 60 \text{ }^\circ\text{C}$, bude již při promáčknutí víčka ztuhlá?

Bonus Jak dlouho po začátku chladnutí marmeláda ztuhne? Předpokládejme, že teplota je v celé sklenici všude stejná a rychlost chladnutí závisí pouze na rozdílu teplot ve sklenici a okolní teploty $T_{ok} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Jardovi letos pomrzly meruňky, tak vzpomíná na jiné roky.

Nejprve si rozeberme, co se vlastně děje. Při nalití do sklenice má marmeláda teplotu T_0 . Trocha vzduchu nad ní se ohřeje na stejnou teplotu – tu si uchová i bezprostředně po uzavření víčkem. Ve sklenici je tedy na počátku vzduch o teplotě T_0 a atmosférickém tlaku p_0 . Sklenice (a vzduch v ní) začne chladnout. Před promáčknutím se objem vzduchu nemění, dochází k izochorickému ochlazování.

K promáčknutí víčka dojde v okamžiku, kdy na něj působí síla F , která je daná rozdílem tlaků vzduchu uvnitř a vně sklenice

$$F = (p_0 - p_p) S \quad \Rightarrow \quad p_p = p_0 - \frac{F}{S},$$

kde plocha víčka je $S = \pi r^2$ a p_p je tlak uvnitř sklenice, při kterém dojde k promáčknutí.

Jednoduchou trojčlenkou (Charlesův zákon) vyjádříme teplotu vzduchu uvnitř sklenice při promáčknutí jako

$$T_p = T_0 \frac{p_p}{p_0} = T_0 \left(1 - \frac{F}{\pi r^2 p_0} \right) \doteq 346 \text{ K} \doteq 73 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Teplotu nesmíme zapomenout do vzorce udávat v Kelvinech. Při promáčknutí víčka tak má marmeláda teplotu stále asi $73 \text{ }^\circ\text{C}$.

Bonus

Tuto vypočtenou teplotu měla marmeláda po čase t od začátku chladnutí. Pokud budeme znát časový vývoj teploty sklenice, můžeme nalézt čas, kdy marmeláda bude mít teplotu tuhnutí. Předpoklad, že rychlost ochlazování sklenice je úměrná rozdílu její teploty a teploty okolí, můžeme zapsat ve tvaru diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ok}}),$$

kde k je konstanta udávající, jak rychle se sklenice ochlazuje, a T je teplota sklenice. Rovnici vyřešíme separací proměnných a integrací

$$T = (T_0 - T_{\text{ok}}) e^{-kt} + T_{\text{ok}},$$

kde jsme konstantu před exponenciálou našli tak, aby teplota sklenice a marmelády v čase $t = 0$ byla rovna T_0 .

Jediný parametr, který ve funkci $T(t)$ neznáme, je k . Známe ovšem teplotu sklenice v čase $t_p = 30$ minut, pro kterou platí

$$T_p = (T_0 - T_{\text{ok}}) e^{-kt_p} + T_{\text{ok}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{t_p} \ln \frac{T_0 - T_{\text{ok}}}{T_p - T_{\text{ok}}}.$$

Jestliže teplota tuhnutí je T_t , pak pro ni platí

$$T_t = (T_0 - T_{\text{ok}}) e^{-kt_t} + T_{\text{ok}} \quad \Rightarrow \quad t_t = t_p \frac{\ln \frac{T_0 - T_{\text{ok}}}{T_t - T_{\text{ok}}}}{\ln \frac{T_0 - T_{\text{ok}}}{T_p - T_{\text{ok}}}}.$$

Po dosazení za teplotu T_p dostáváme čas ztuhnutí marmelády jako

$$t_t = t_p \frac{\ln \frac{T_0 - T_{\text{ok}}}{T_t - T_{\text{ok}}}}{\ln \frac{T_0 - T_{\text{ok}}}{T_0 \left(1 - \frac{F}{\pi r^2 p_0} \right) - T_{\text{ok}}}} \doteq 98 \text{ min}.$$

Marmeláda ztuhne po 98 minutách od zavření víčka.

Úloha I.4 . . . doprava na horách

8 bodů; průměr 5,68; řešilo 162 studentů

Na úpatí hory tvaru dokonalého kužele s vrcholovým úhlem $\alpha = 90^\circ$ stojí město. Přesně na opačné straně hory ve stejné nadmořské výšce je železniční stanice, proto se radní z města rozhodli pro stavbu silnice ke stanici. Můžou postavit buď tunel, nebo cestu vést po povrchu hory. Jaký může být maximální poměr ceny za kilometr tunelu ku ceně za kilometr silnice, aby byla stavba tunelu levnější? Silnici lze vést libovolnou trasou po povrchu hory.

Matěj staví Semmeringbahn.

Radní mají několik možností, jak cestu postavit. Mohou vykopat tunel od města až přímo k železniční stanici (možnost A) nebo můžou vést celou cestu po povrchu hory (možnost B). Můžou také vést část cesty z města po povrchu, pak tunelem a pak zase po povrchu až k železniční stanici (možnost C).

Případ A

Označme si vzdálenost města od vrcholu hory l . Jestliže α je úhel město–vrchol–stanice, tak prostorová vzdálenost s_A města od stanice je

$$s_A = 2l \sin \frac{\alpha}{2},$$

což je zároveň i délka tunelu z města ke stanici.

Případ B

Tato možnost je komplikovanější, protože nyní nemusí být jasné, kudy má cesta vést. V případě A jsme vedli tunel nejkratší možnou spojnici v prostoru – po úsečce. Nyní by se mohlo zdát, že musíme vést cestu po zakřiveném povrchu, což je náročnější⁴. Ve skutečnosti ale povrch kužele není zakřiven, jak by se mohlo zdát. Můžeme jej totiž rozbalit a plášť kužele rozložit do rovné 2D plochy.⁵ Po tomto rozbalení již můžeme spojit město s železnicí snadno pomocí úsečky a spočítat její délku.

Obvod podstavy kužele je $o = \pi s_A$ a ústí tunelu ho dělí na poloviny. Plášť kužele je kruhová výšeč o středovém úhlu $\varphi = o/l$. Cesta po povrchu je tak tvořena základnou rovnoramenného trojúhelníka s rameny délkou l a úhlem $\varphi/2$ mezi nimi. Délka této cesty tedy je

$$s_B = 2l \sin \frac{\varphi}{4} = 2l \sin \left(\frac{1}{2} \pi \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

což je nejkratší spojnice města a železnice po povrchu hory.

Případ C

O třetí možnosti lze bez potřeby výpočtů ukázat, že není optimální. Ze symetrie problému plyne, že se cesta z města do začátku tunelu musí být zrcadlově symetrická k cestě z konce tunelu do nádraží. Jedině tak se nám podaří přiblížit konce tunelů tak, abychom museli kopat co nejkratší tunel. Předpokládejme, že by neefektivnějším řešením našeho problému byla možnost C.

⁴V obecném případě bychom se mohli uchýlit k diferenciální geometrii a využít geodetickou rovnici. *Geodetiky* jsou totiž nejkratší spojnice dvou bodů v zakřiveném prostor(-u/-očase).

⁵Můžeme říkat, že povrch kužele nemá *vnitřní* zakřivení, ale má pouze *vnější* křivost, která je dána tím, jak je „rovný“ 2D plášť vnořen do 3D prostoru.

Tj. postavit cestu z města po povrchu do nějakého bodu, odtamtud vést tunel do zrcadlového bodu a odtud vést cestu k železnici.

Nyní ukážeme, že v optimálním řešení nemůže tunel procházet osou hory. Podívejme se na poměr délky tunelu ku délce pomyslné cesty po povrchu, kterou tunel ušetřil. V případě tunelu vedoucího mimo osu hory je tento poměr určitě ostře větší, než když tunel prochází osou. To platí, protože pomyslná cesta po povrchu vede relativně menší oklikou (vzhledem k délce tunelu), když je tunel blíže k povrchu. Dochází tak k nižší cenové úspoře, a proto se takto kratší mimoosý tunel nikdy nevyplatí stavět.

Pokud by tunel procházel osou hory, tak bude cesta konstruována dosti nešikovným způsobem – silnice povede z města i ze stanice přímo směrem k vrcholu hory a tunel bude položen vodorovně ve vyšší nadmořské výšce. Pokud by toto měla být optimální konstrukce, znamená to, že se mezi těmito vyššími konci tunelu nevyplatí vést cestu po povrchu (analogicky jako cesta v případě B). Jelikož ale poměr délky A ku B není závislý na výšce hory, strategie s výše položeným tunelem nedává ekonomicky smysl, protože si tím jen přidáváme dva nepříjemné úseky cesty.

Tímto sporem jsme ukázali, že případ C nemusíme brát v potaz.

Závěr

Kritický poměr ceny za kilometr tunelu ku ceně za kilometr cesty na povrchu je poměr délky povrchové cesty ku délce tunelu

$$\frac{s_B}{s_A} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \doteq 1,267,$$

Pokud je poměr cen nižší, vyplatí se kopat tunel. Pokud je vyšší, vyplatí se vést cestu kolem hory. V praxi můžeme očekávat, že poměr cen bude řádově vyšší. Přesto se někdy vyplatí kopat tunely, protože reálné hory nejsou kuželovité a často nelze postavit cestu okolo.

Všimněme si, že pokud bychom si neuvědomili, že cestu nemusíme nutně vést vodorovně, vyšel by kritický poměr vyšší, a sice $\pi/2 = 1,571$.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha I.5 ... a zase ta U-trubice

8 bodů; průměr 3,87; řešilo 79 studentů

Do U-trubice s celkovou délkou l a průřezem o obsahu S nalijeme V vody (tak, aby byl celý ohyb pod vodou a současně platilo $Sl > V$) a necháme ustálit hladinu. Jeden konec U-trubice uzavřeme a vodní hladinu rozkmitáme. Jaká bude perioda malých kmitů vodního sloupce?

Karloví zase hráblo.

V ustáleném stavu bude hladina v obou částech U-trubice stejně vysoko. Odchylku od této rovnovážné polohy označíme x . Necht je $x > 0$ při poklesu hladiny v uzavřené části trubice. Potenciální energii soustavy při odchylce x budeme značit $E_p(x)$.

Lze ukázat⁶, že pro periodu malých kmitů soustavy s potenciální energií závislou pouze na výchylce platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{E_p''(x_0)}}, \quad (2)$$

⁶David Morin: *Introduction to Classical Mechanics*.

kde x_0 je rovnovážná poloha výchylky (v našem případě $x_0 = 0$), E_p'' je druhá derivace E_p podle x a m je oscilující hmotnost. Výpočet potenciální energie nemusí být v tomto případě snadný, proto místo ní spočítáme sílu. Pro ní totiž platí $F = -E_p'$, takže můžeme psát $E_p'' = -F'$.

Na vodu působí dvě síly, tlaková a tíhová. Tlak v uzavřené části označme p , v otevřené bude atmosférický p_a . Tlaková síla bude zřejmě $F_p = (p - p_a)S$. Jelikož jsou oscilace velmi rychlé, stlačování a roztahování vzduchu bude adiabatické, neboli

$$pV_u^\kappa = p_a V_0^\kappa,$$

kde κ je Poissonova konstanta vzduchu, V_0 , resp. V_u , je počáteční, resp. průběžný objem v uzavřené části a p je tlak při objemu V_u . Jelikož je trubice válcová (kromě ohybu dole, který je stejně zaplněn vodou), je její objem

$$V_0 = Sa, \quad V_u = S(a + x),$$

kde a je počáteční výška vzduchu v uzavřené trubici. Dosazením do vztahu pro tlakovou sílu dostaneme

$$F_p = (p - p_a)S = p_a \left(\left(\frac{V_0}{V_u} \right)^\kappa - 1 \right) S = p_a \left(\left(\frac{a}{a+x} \right)^\kappa - 1 \right) S.$$

Tíhovou sílu určíme jednoduše – poklesne-li v jedné části voda o x , ve druhé musí stoupnout o x . Tím na jedné straně vznikne blok vody o výšce $2x$ působící silou

$$F_g = -2S\rho gx,$$

kde záporné znaménko znamená, že síla působí proti výchylce. Složením obou sil dostáváme

$$F = F_p + F_g = \left(p_a \left(\left(\frac{a}{a+x} \right)^\kappa - 1 \right) - 2\rho gx \right) S.$$

Nyní můžeme spočítat druhou derivaci potenciální energie

$$\begin{aligned} E_p'' &= -F' = \left(\kappa p_a a^\kappa (a+x)^{-\kappa-1} + 2\rho g \right) S, \\ E_p''(0) &= \left(\frac{\kappa p_a}{a} + 2\rho g \right) S. \end{aligned}$$

Poslední, co zbývá, je vyřešení geometrie trubice a určení a . Předpokládejme, že naše trubice má kruhový průřez (tak jako většina trubic). Označme r její vnitřní poloměr a R poloměr dolního ohybu. To je vlastně polovina toru. Vztah pro objem celého toru je

$$V_t = 2\pi^2 Rr^2.$$

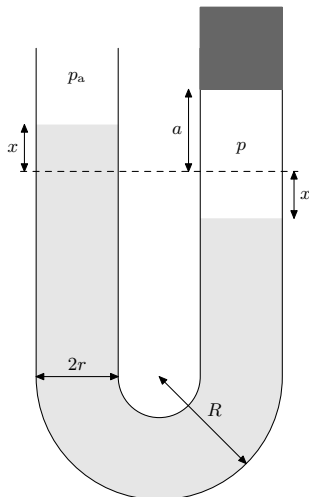
V našem případě voda zatopí celý ohyb čili polovinu toru, který představuje πR z délky trubice. Zbytek vody (neboli $V - V_t/2$) zabere úsek trubice o délce l_v , takže pro vzduch zbyde

$$2a = l - \pi R - l_v = l - \pi R - \frac{1}{S} \left(V - \frac{1}{2} V_t \right) = l - \frac{V}{S}.$$

Jak vidíme, torus má stejný délkový objem jako rovné části trubice, čímž se výpočet značně zjednoduší.

Nakonec ještě určíme hmotnost vody jako $m = \rho V$ a dosazením do (2) dostaneme výsledek

$$T = \pi \sqrt{\frac{2V}{S} \left(\frac{\kappa p_a}{\rho} \left(l - \frac{V}{S} \right)^{-1} + g \right)^{-1}}.$$



Obr. 1: Nákres situace.

Úloha I.P ... vlaková

9 bodů; průměr 4,51; řešilo 88 studentů

Odhadněte spotřebu elektrické energie na jednu jízdu vlaku IC Opavan. Souprava se sedmi vozy má lokomotivu řady 151 a je schopná dosáhnout rychlosti $v_{\max} = 160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pro jednoduchost uvažujte, že všichni cestující jedou z Prahy do Opavy. Skřítek jezdí domů vlakem.

Základné parametre

Medzi pre nás základné parametre, ktoré potrebujeme vedieť je hmotnosť vlaku, uvažujeme podľa zadania plný vlak z východiskovej až do cieľovej stanice. Hmotnosti jednotlivých vozňov a lokomotívy sú v tab. 1.^{7 8}

Ďalší podstatný parameter, ktorý budeme potrebovať je činiteľ odporu C_x , ktorý odhadneme porovnaním tvaru vlaku s tabuľkovými hodnotami. Hodnotu sme nakoniec zvolili $C_x = 0,9$. Prierez vozidla S_{DV} budeme uvažovať ako obdĺžnik $4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$,⁹ $S_{DV} = 12 \text{ m}^2$. Posledné, čo potrebujeme vedieť je jazdný čas, ktorý je 3 hod 43 min pre GVD 2021/2022,¹⁰ teda $t = 3,71 \text{ h}$.

Výškový profil trate

Železničná trať podobne ako ostatná líniová infraštruktúra kopíruje terén a prispôsobuje sa mu, z tohoto dôvodu trať nevedie po rovine, ale stúpa a klesá. Vlak z Prahy do Opavy začína jazdu v stanici Praha hl.n. s nadmorskou výškou 210 m.n.m., následne začína stúpať z údolia Vltavy až do zastávky Tuklaty (260 m.n.m.), odtiaľ klesá do údolia Labe, a pred Kolínom dosahuje

⁷Spolek ŽelPage: Atlas vozů.cz, dostupné na webe <https://www.atlasvozu.cz/>

⁸VAGONY.CZ: tab. 1: hodnoty součinitele rotačních hmot, dostupné na webe <https://www.vagony.cz/vagony/energie.html>

⁹Ing. Vilém Hoffmann: Typový výkres řady 151

¹⁰SŽ s.o.: Jízdní řád, dostupné na webe <https://www.spravazeleznic.cz/cestujici/jizdni-rad>

Tab. 1: Radenie vlaku s hmotnosťami prázdnych vozňov m_p , vozňov obsadených m_o , dĺžky vozňov l_v , počet cestujúcich n a rotačná hmotnosť vypočítaná a $m_r = m_o(1 + \rho_r)$

DV	$\frac{m_p}{t}$	$\frac{m_o}{t}$	$\frac{l_v}{m}$	$\frac{n}{os}$	$\frac{m_r}{t}$
151	82	82	16,74	-	98,4
Bdpee ²³¹	41	47	24,5	72	49,82
Bmz ²²⁶	48	53	26,4	66	56,18
Bmz ²²⁶	48	53	26,4	66	56,18
Bmz ²²⁶	48	53	26,4	66	56,18
Bbdgmee ²³⁶	46	50	26,4	41	53
ARpeer ⁶¹ (ZSSK)	45	47	24,5	24	49,82
Ampz ¹⁴⁶	47	52	26,4	58	55,12
Spolu	405	437	197,74	393	474,7

minimum nadmorskej výšky, niečo málo pod 200 m.n.m. Z Kolína vlak stúpa popri Labe a následne údolím Orlice až do najvyššieho bodu našej cesty, Třebovice v Č., s výškou 420 m.n.m. Odtiaľ klesáme popri rieke Morave až do blízkosti sútoku Bečvy a Moravy tj. Výhybne Dluhonice (200 m.n.m.). Práve popri Bečve sa vydávame opäť do kopca až kúsok za Hranice n. M., konkrétne na zastávku Běloutín (290 m.n.m.), kde sa niveleta kolají opäť mení a klesáme popri rieke Odra do stanice Ostrava-Svinov (215 m.n.m.), kde sa odpájame z koridoru a ďalej budeme pokračovať po jednokolažnej trati až do konečnej stanice Opava (255 m.n.m.).¹¹

K výpočtu energie potrebnej na stúpanie budeme uvažovať jednoduchý model, kde potrebujeme zdvihnúť teleso o hmotnosti m_o do výšky rovnajúcej sa rozdielu jednotlivých staníc $\Delta h = h_k - h_z$, energia jedného stúpania bude $E_i = \Delta h_i m_o g$ vid' Tab. 2. Celkovú energiu E_{prev} vypočítame ako súčet všetkých stúpaní

$$E_{prev} = \sum_i \Delta h_i m_o g,$$

$$E_{prev} = 1,67 \text{ GJ} = 464 \text{ kWh}.$$

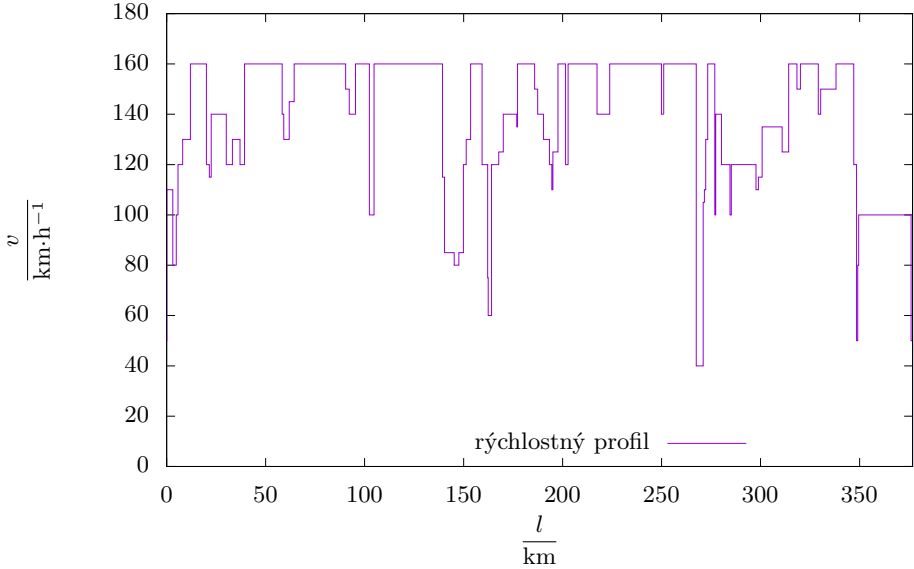
Tab. 2: Začiatok a koniec stúpaní, ich nadmorské výšky h_z a h_k , celkové prevýšenie Δh a energia potrebná na jednotlivé stúpania vlaku E

začiatok stúpania	$\frac{h_z}{\text{m.n.m.}}$	koniec stúpania	$\frac{h_k}{\text{m.n.m.}}$	$\frac{\Delta h}{\text{m}}$	$\frac{E}{\text{MJ}}$
Praha hl.n.	210	Tuklaty z.	260	50	214
Kolín	200	Třebovice v Č.	420	220	943
Vých. Dluhonice	210	Běloutín z.	290	80	343
Ostrava-Svinov	215	Opava	255	40	171

¹¹Ing. Pavel Krýže, Ph.D, SŽ s.o.: Nadmořské výšky železničních stanic a zastávek, dostupné na webe <https://provoz.spravazeleznic.cz/portal/Show.aspx?path=/Data/Mapy/nadm.pdf>

Rýchlostný profil trate

Vlak nejde po celej trase rovnakou rýchlosťou. Kvôli oblúkom, stavu infraštruktúry, traťovému a staničnému zabezpečovaciemu zariadeniu nedosahuje na celej trase maximálnu rýchlosť, ale musí brzdiť a zrýchľovať. Rýchlostný profil je vyobrazený v grafe 2¹²



Obr. 2: Grafické znázornenie rýchlostného profilu v trate staničného od Prahy hl.n., bez zastavení vlaku v staniaciach

Na tieto zmeny rýchlosti je potrebná energia, predovšetkým na zrýchľovanie. Ak vlak ide rýchlosťou v_1 a zrýchli na rýchlosť v_2 potrebuje k tomu energiu

$$E = E_{k2} - E_{k1},$$

$$E = \frac{1}{2}m_r v_2^2 - \frac{1}{2}m_r v_1^2,$$

$$E = \frac{1}{2}m_r (v_2^2 - v_1^2),$$

ktorú spočítame pre jednotlivé rýchlostné skoky, kde vlak zrýchľuje. Nás, ako vždy, zaujíma celková energia

$$E_{vprof} = \frac{1}{2}m_r \sum_i v_{i2}^2 - v_{i1}^2,$$

$$E_{vprof} = 4,20 \text{ GJ} = 1165 \text{ kWh}.$$

¹²SŽ s.o.: TTP 525A, 501A, 309A, 309E, 305B, 301F

V tomto výpočte nie je zahrnuté zastavovanie v staniaciach, Opavan zastavuje v staniaciach uvedených v tab. 3.¹³ Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom prípade pričom $v_1 = 0$ a $v_2 = v_{zst}$. V tomto prípade potrebujeme na rozbeh $E_{zst} = 816 \text{ MJ} = 227 \text{ kWh}$.

Tab. 3: Zástavky IC Opavan spolu s rýchlosťou v_{zst} , na ktorú sa zo stanice rozbieha

ŽST	$\frac{v_{zst}}{\text{km/h}}$
Praha hlavní nádraží	50
Pardubice hlavní nádraží	100
Olomouc hlavní nádraží	140
Ostrava-Svinov	50
Háj ve Slezsku +	100
Opava východ	-

Odpor vzduchu

Vlak sa nepohybuje vo vákuu a pôsobí naň odpor vzduchu. Odpor vzduchu vypočítame pomocou rýchlostného profilu podľa vzťahu $F_d = \rho_{vzd} v^2 C_x S_{DV}$, kde C_x a S_{DV} sme si stanovili v úvodnej časti, hustota vzduchu $\rho_{vzd} = 1,29 \text{ km} \cdot \text{m}^{-3}$ a v je rýchlosť vlaku. Energiu vypočítame ako $E_d = F_d l$,¹⁴ kde l je dĺžka, na ktorej pôsobí daná sila, v našom prípade úsek s rovnakou rýchlosťou. Celkovú energiu vypočítame ako

$$E_d = \sum_i \rho_{vzd} v_i^2 C_x S_{DV} l_i,$$

$$E_d = \rho_{vzd} C_x S_{DV} \sum_i v_i^2 l_i,$$

$$E_d = 4,12 \text{ GJ} = 1146 \text{ kWh}.$$

Vozidlový odpor

Odpor pochádza aj od kolies samotných a všetkých pohyblivých častí podvozku, uvažujeme oporovú silu $F_v = m_{og} (1,35 + 0,0008v + 0,00033v^2)$ ¹⁵ Potom celová energia potrebná na prekonanie tejto sily je $E_r = F_v l$, kde l je celková vzdialenosť, po dosadení dostávame $E_r = 835 \text{ kWh}$.

Rekuperácia

Rekuperácia alebo návrat spätného prúdu pri brzdení je v sieti SŽ dovolená na celej trati z Prahy do Ostravy, avšak v úseku Ostrava-Svinov – Opava je zakázaná. Rekuperácia sa používa pri brzdení alebo pri jazde z kopca, kde vlak namiesto klasického brzdenia „brzdí motormi“, ktoré sa správajú ako generátory a dodávajú prúd naspäť do siete, a ten používajú iné vlaky. Sieť SŽDC momentálne neumožňuje návrat prúdu do rozvodnej siete. Zároveň pre rekuperáciu platia

¹³SŽ s.o.: TTP 525A, 501A, 309A, 309E, 305B, 301F

¹⁴Predpokladáme $l \gg l_v$.

¹⁵VAGONY.CZ: tab. 2: rovnice měrného vozidlového odporu <https://www.vagony.cz/vagony/energie.html>

prísne pravidlá, aby nedošlo k preťaženiu siete, prepáleniu trakčného vedenia, prip. prepätia v trakčnom vedení.

Ďalšie „netrakčné“ odbery: klimatizácia, technológie potrebné pre jazdu, el. zásuvky a pod.

Klimatizácia vo vozňoch je tvorená zväčša dvoma jednotkami o jednotkovom príkone $P \doteq \doteq 15 \text{ kW}$ ¹⁶ Celkovo pre 7 vozňov je to 14 klimatizačných jednotiek o celkovom príkone $P_{cl} \doteq \doteq 210 \text{ kW}$, čo za jazdu spotrebuje $E_{cl} \doteq \doteq 666 \text{ kWh}$.

V chladnejšom období roka vozeň naopak treba vykurovať, k tomu uvažujeme na vozeň jednu jednotku o výkone $P = 40 \text{ kW}$. Čo je rádovo porovnateľné s príkonom klimatizácie.

Vagón má aj osvetlenie a ďalšie systémy, celkový príkon týchto zariadení odhadneme na $P \doteq \doteq 1 \text{ kW}$ na vozeň, celkovo dostávame za jazdu pre 7 vozňov $E_{os} \doteq \doteq 25 \text{ kWh}$.

Ďalším odberom sú aj elektrické zásuvky, ktoré používajú ľudia. Odhadnime priemerný výkon $P_1 = 15 \text{ W}$, pri počte 393 cestujúcich je to celkovo $P_{el} = 5895 \text{ W}$, čo odpovedá spotrebovanej energii $E_{el} = 22 \text{ kWh}$.

Pomocné systémy má aj lokomotíva, medzi ne patrí napr. pneumatický hlavný a pomocný kompresor o jednotkovom príkone $P \doteq \doteq 13 \text{ kW}$. Celkový príkon týchto systémov môžeme odhadnúť $P \doteq \doteq 100 \text{ kW}$, čo je odhadom $E_{hdv} \doteq \doteq 371 \text{ kWh}$.

Celková energia

Výkony môžeme rozdeliť na „trakčné“, vykonávané motormi, a „netrakčné“, pomocné systémy a pod..

Výkony trakčné sú v našom prípade zastupované energiami v tab. 4. Menovitý výkon lokomotívy rady 151 je $P_{151} = 4000 \text{ kW}$, nami vypočítaná energia odpovedá priemernému výkonu $P_t = E_t/t$, dostávame $P_t = 1021 \text{ kW}$, čo je o veľa menej ako maximálny výkon lokomotívy.

„Netrakčné“ energie dosahujú hodnoty $E_{nt} = 1081 \text{ kWh}$, z čoho dostávame celkovú potrebnú energiu $E_c = E_{nt} + E_t = 4873 \text{ kWh}$.

Tab. 4: „Trakčné“ energie podľa typu a ich menovité hodnoty

Názov	označenie	$\frac{E}{\text{kWh}}$
Prevýšenie	E_{prev}	464
Zmena rýchlosti	E_{vprof}	1165
Zastavenia v stanicich	E_{zst}	227
Odpor vzduchu	E_d	1146
Vozidlový odpor	E_r	835
Spolu	E_t	3838

Účinnosť

Posledné nad čím sa treba zamyslieť je účinnosť. Samotné motory v dnešných podmienkach majú účinnosť väčšiu ako 90 %, lokomotíva rady 151 je generačne staršia a dá sa predpokladať, že účinnosť sa môže pohybovať okolo 80 %.

¹⁶Techklima s.r.o.: skklimy2.crd, dostupné na webe <http://www.techklima.sk/wp-content/uploads/a4sk.pdf>

Odporová regulácia, ktorá je používa v rade 151, generuje veľké množstvo tepla a stratového výkonu, odporníky sú umiestnené na streche a sú chladené vzduchom, ktorý na ne fúkajú veľké ventilátory. Hrubý pomer odporu odporníka voči odporu motoru je 1:2, teda účinnosť je rádo vo úrovni 66%.

Medzi ďalšie straty môžeme započítať hlavne prechodové odpory na zberači. Odhad účinnosti prenosu výkonu z trakčného vedenia na nápravu je približne 50%.

Existuje množstvo ďalších faktorov, ktoré nie sú započítané, napríklad, prevádzkové zastavenia, reálne zrýchľovanie/brzdzenie alebo zvýšený odpor v oblúkoch. Zároveň sa jednotlivé jazdy môžu od seba líšiť, či už technikou jazdy rušňovodiča, ale napríklad aj vlakmi pred/za týmto vlakom a tým ovplyvnené napätie v TV a pod.

Záver

Približná spotrebovaná energia, ktorú IC Opavan potrebuje je 7 MWh.

Poznámky k riešeniam

Niektorí riešitelia si neuviedli, že vlak neletí ako lietadlo, ale ide po povrchu Zeme. Preto za vzdialenosť z Prahy do Opavy, ktorú vlak prejde, nemôžeme brať vzdušnú vzdialenosť, ale musíme uvažovať vzdialenosť, ktorú vlak prejde po kolajniciach.

Ďalšia skupina riešiteľov vyťahuje vlak vo vesmíru, pretože za silu, ktorú prekonáva lokomotíva, brali tiaž vlaku (hmotnosť násobenú tiažovým zrýchlením).

Veľa ľudí si neuviedlo, že ide o vlak v Česku, a teda nepôjde celý čas maximálnou rýchlosťou. S tým súvisí aj čas jazdy, ktorý si mnohí riešitelia nedokázali zistiť.

Niektorí z vás dokonca vynašli aj perpetuum mobile. A v neposlednom rade, mnohí z vás nevedia, ktorá spoločnosť je zodpovedná za infraštruktúru (SŽ s.o.), a ktorá za prevádzku vlakov (CD a.s.).

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Úloha I.E ... hustý led

13 bodů; (chybí statistiky)

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: <https://fykos.cz/>.

Úloha I.S ... hledáme kvanta

10 bodů; průměr 7,53; řešilo 91 studentů

Najděte si hodnotu Rydbergovy konstanty a určete, které spektrální čáry vodíku náleží do viditelného spektra. Tyto čáry jsou jediné, které mohl Rydberg k objevení svého vztahu použít, protože UV ani IR spektra ještě nebylo možné měřit. Jakou mají barvu a kterým přechodům v Bohrově modelu odpovídají? (3b)

Spočítejte si svoji de Broglieho vlnovou délku. Jaká je tato hodnota ve srovnání s velikostí atomu, případně atomového jádra? (3b)

Máme kyvetu s 10 ml roztoku fluoresceinu ve vodě, do které svítíme argonovým laserem o vlnové délce 488 nm a výkonu 10 W. Zároveň molekula fluoresceinu fluorescenčně vyzařuje na vlnové délce 521 nm s kvantovým výtěžkem (podíl absorbovaných fotonů, které se vyzáří zpět) 95%. Pokud je počáteční teplota kyvety 20 °C, za jak dlouho se její obsah začne vařit?

Předpokládejte, že květa je dokonale tepelně izolovaná, že paprsek se v ní plně absorbuje a že množství fluoresceinu je zanedbatelné z hlediska tepelné kapacity. (4b) *Dárek od Mikuláše.*

Pokud nahlédneme do vhodných tabulek (nebo do hlubin internetu, na tom nesejde), najdeme minimálně dvě různé „Rydbergovy“ konstanty. Jedna, značená nejčastěji R_∞ , je skutečně fundamentální konstanta o hodnotě $10\,973\,731\text{ m}^{-1}$. Tato hodnota by ale platila jen v případě, kdy bychom měli skutečně nehybné jádro neovlivňované pohybem elektronu. V reálném atomu vodíku jej samozřejmě trochu ovlivňuje, podobně jako Měsíc a Země obíhají kolem společného těžiště. To ale lze analyticky zahrnout (podobně jako u pohybu vesmírných těles zavedeme redukovanou hmotnost) a získáme Rydbergovu konstantu pro vodík R_H . Její hodnota je ale velmi podobná, $1,096\,78 \cdot 10^7\text{ m}^{-1}$. Například pro deuterium už by ale byla jiná. Vzhledem k tomu, že se hodnoty liší na čtvrté platné číslici, je v našem příkladu jedno, kterou použijeme.

Začneme tím, že se podíváme na přechody ze základního stavu, tedy pro $n_1 = 1$ v Rydbergově vzorci. Pokud zvolíme $n_2 = 2$, pak dosazením získáme hodnotu vlnové délky asi 122 nm, což už je tvrdé ultrafialové záření (nazývané také vakuové UV, protože ve vzduchu je silně absorbováno, takže pro práci s ním potřebujeme vakuovou aparaturu). Přechody na vyšší hladiny budou mít ještě větší energii, takže jejich vlnové délky nemá smysl počítat, protože budou od viditelného světla ještě vzdálenější.

Pokud budeme přecházet z prvního excitovaného stavu vodíku do toho nejbližšího vyššího ($n_1 = 2, n_2 = 3$), dostaneme vlnovou délku 656 nm, tedy už ve viditelné části spektra. Konkrétně je v červené oblasti, blízko přechodu do oranžové. Zkusme ještě ostatní možné hodnoty n_2 . Pro $n_2 = 4$ máme vlnovou délku asi 486 nm a odpovídající čára má barvu, kterou lze asi nejlépe označit jako azurovou. Přechod na $n_2 = 5$ odpovídá vlnové délce 434 nm (všimněte si, jak se nám spektrální čáry zahušťují!) a čára má modrou barvu. Další s $n_2 = 6$ má 410 nm a je fialová. Následující čára má vlnovou délku 397 nm, což spadá již mimo oblast tradičně vnímanou jako viditelné světlo, která sahá přibližně do 400 nm. Ve skutečnosti je toto rozdělení na viditelné a UV světlo neostré, často se udává jako hraniční hodnota i 390 nm či 380 nm, což by nám přidalo další 1 až 3 čáry, ale faktem zůstává, že v reálném světě se zkombinuje klesající citlivost oka na vlnové délky blízké UV s tím, že intenzita vyzařování těchto vyšších excitací klesá aťv praxi je již čára na 410 nm téměř nezatelná.

Pokud uvažujeme přechody z $n_1 = 3$ na vyšší hladiny, tak pro nejbližší vyšší hladinu $n_2 = 4$ máme vlnovou délku 1875 nm, což je již v infračervené oblasti. I když budeme uvažovat libovolně vysoké hladiny, tak v limitě pro $n_2 \rightarrow \infty$ jsme na vlnové délce 821 nm, která je stále v infračervené oblasti. A i pro excitace z vyšších hodnot n_1 se z infračervené oblasti nedostaneme.

Tedy pro přehlednost ještě shrneme výsledky do tabulky, spolu se značením těchto čar používaným v astronomii.

Čára	Přechod	Vlnová délka	Barva
H_α	$2 \rightarrow 3$	656 nm	Červená
H_β	$2 \rightarrow 4$	486 nm	Azurová
H_γ	$2 \rightarrow 5$	434 nm	Modrá
H_δ	$2 \rightarrow 6$	410 nm	Fialová

Jistě jste si všimli, že spektrální čáry pro excitaci z konkrétní hladiny n_1 spadají do nějaké jedné oblasti elektromagnetického spektra. Mluvíme o takzvaných sériích spektrálních čar, které jsou většinou pojmenované po člověku, který je objevil. Výjimkou je právě série pro $n_1 = 2$,

jejíž začátek je ve viditelném spektru, která se nazývá Balmerova. Toho jsme ostatně zmiňovali i v seriálu.

Pro $n_1 = 1$ mluvíme o sérii Lymanově, která je celá v ultrafialové oblasti spektra. Pro čáry s excitacemi z $n_1 = 3$ mluvíme o Paschenově sérii, která je naopak v infračervené oblasti. Tyto dvě série byly pozorovány mezi roky 1906 a 1914, takže to docela zapadá do historické linky popsané v seriálu. Další 2 série (Brackettova, Pfundova) byly pozorovány v letech 1922 a 1924. Další série byla experimentálně pozorovaná až v roce 1953, tedy asi o třicet let později. Vědce také dlouho mátlly spektrální čáry He^+ ve spektrech hvězd. Ty vychází tak, že polovina čar ve viditelném spektru se překrývá s těmi vodíkovými, zatímco druhá polovina vychází přesně mezi ně. Dlouho byly považované za „poločíselné“ čáry vodíky, než je Niels Bohr správně přiřadil iontu He^+ .

Zárovenň je vhodné zmínit, že každá ze sérií obsahuje nekonečně mnoho čar, které zahrnují excitace na všechny vyšší elektronové hladiny až do limity pro $n_2 = \infty$, která odpovídá úplnému odtržení elektronu od atomu. Takže vlastně máme štěstí, že nám spektrální čáry Balmerovy série utečou do UV oblasti, jinak by toto vzorové řešení mělo nekonečnou délku.

Před hledáním své de Broglieho vlnové délky si musíme uvědomit, že úloha je (naschvál) zadaná neúplně, de Broglieho vlnová délka je totiž závislá na naší hybnosti. My si tedy zvolíme rychlost chůze, tedy $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, a hmotnost 60 kg . To nám dá hybnost ze vzorce $p = mv$ asi $80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ (nebojme se hodně zaokrouhlovat, stejně nám jde spíše o řádový odhad). Nyní musíme dosadit do vzorce ze seriálu $\lambda = h/p$. Hodnota Planckovy konstanty je přibližně $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, což dává de Broglieho vlnovou délku okolo $8 \cdot 10^{-36} \text{ m}$. To je úplně zanedbatelná hodnota oproti velikosti atomu $\sim 10^{-10} \text{ m}$ i velikosti atomového jádra $\sim 10^{-15} \text{ m}$. Dokonce je to méně než Planckova vzdálenost $1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$, což je v moderní teoretické fyzice považováno za nejmenší vzdálenost, která má smysl z hlediska fyzikálních zákonů.

Co to ale znamená? Když se podíváme na klasickou optiku, tak vlnové vlastnosti světla se projevují (jako difrakce nebo interference) na škálách srovnatelných s vlnovou délkou (velikost mřížky, tloušťka filmu). Takže pokud se pohybujeme na našich makroskopických škálách, vlnové charaktery se „desynchronizují“ a žádnou interferenci nepozorujeme. To se odborně nazývá dekoherence. Kvůli tomu se v každodenním životě kvantové jevy neprojeví, podobně jako světlo žárovky na jemném sítku neinterferuje. Tímto způsobem Planckova konstanta h určuje škálu, na které se projeví kvantové efekty. Pokud by byla její hodnota řádově $1 \text{ J} \cdot \text{s}$, náš život by byl kvantový.

Nakonec je nutné zmínit, že podobně jako hybnost, tak i de Broglieho vlnová délka závisí na volbě vztažného systému. To ale nebrání tomu formulovat kvantovou teorii tak, aby byla na volbě vztažného systému nezávislá.

K řešení úlohy s fluorescencí je vhodné si nejdříve uvědomit, co se vlastně v kyvetě děje. Světlo laseru je absorbováno a každý foton záření excituje jednu molekulu fluoresceinu do nějakého vyššího excitovaného stavu. Excitované stavy molekuly si můžeme představit pomocí jednoduchého modelu. Elektrony se v atomech molekuly nemohou pohybovat libovolně, ale mají své povolené dráhy podobné jako orbity Bohrova modelu. Tyto dráhy nejsou okolo jádra jediného atomu, místo toho elektrony obíhají celou molekulu. Excitovaný stav pak je, když nějaký elektron vyskočí do nějaké vyšší orbity (později si ukážeme, že to vlastně není až tak hloupá představa). Odtud se pak postupně „propadá“ do druhého nejnižšího stavu. Přebytnou energii v tomto případě nevyžáří jako foton, ale předává ji během vzájemných srážek okolním molekulám vody ve formě kinetické energie (my makroskopičtí tuto kinetickou energii nazýváme teplem). Samozřejmě by tato molekula mohla vyžářit i foton, ale předávání energie okolním

molekulám v tomto případě probíhá mnohem rychleji, takže z praktického hlediska můžeme vyzáření fotonu zanedbat. Z druhého nejnižšího stavu pak již molekula přechází do nejnižšího (základního) stavu. To v zásadě může udělat dvěma způsoby: buď do základního stavu seskočí a vyzáří přitom jeden foton o vlnové délce 521 nm, což nastane v 95 % případů. V těch ostatních pokračuje v předávání energie okolním molekulám vody, takže se nevyzáří nic (mluvíme o nezářivém přechodu).

Když už jsme si vyjasnili fyziku problému (i když zjednodušeně, nerozlišujeme stavy molekuly způsobené vibrací jader od těch způsobených pohybem elektronů), můžeme si spočítat, jak velká část výkonu laseru se skutečně použije. Je jasné, že v těch 5 % případů, kdy se foton absorbuje a nevyzáří žádný zpět, se veškerá energie laseru spotřebuje na ohřev roztoku. V druhém případě si podíl energie, která způsobuje ohřev, musíme spočítat. „Účinnost“ fluorescenčního ohřevu bude daná jako

$$\eta_{F1} = \frac{E_{La} - E_{F1}}{E_{La}},$$

kde jsme energii fotonu přicházejícího z laseru označili E_{La} a fotonu vyzářeného fluorescencí jako E_{F1} . Dosadíme-li energii fotonu $h\nu = hc/\lambda$ a provedeme-li pár úprav, konstanty se pokrátí a získáme vztah

$$\eta_{F1} = 1 - \frac{\lambda_{La}}{\lambda_{F1}}.$$

Z toho pak získáme celkovou účinnost

$$\eta = 0,05 + 0,95 \eta_{F1}.$$

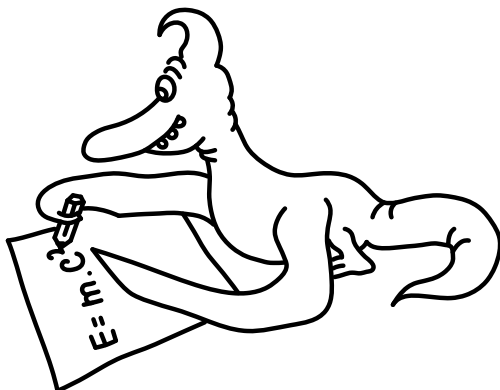
Dosazením pak zjistíme, že tato účinnost je asi 11 %.

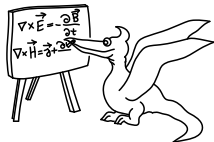
Nyní, když známe účinnost, již můžeme snadno spočítat dobu ohřívání

$$t = \frac{mc_{H_2O} \Delta T}{\eta P}.$$

Dosazením do předchozího vztahu získáme výsledek něco málo přes 3000 s, tedy asi 50 min.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz





Seriál: Počítáme kvanta

V dnešním díle si zavedeme Schrödingerovu rovnici, jak jsme si slíbili minule. Rovnou si s ní můžeme začít i hrát.

Díky, teď jsem se ztratil

Než si ale ukážeme zmíněnou rovnici, je potřeba se nejdříve úplně oprostít od klasické (Newtonovské) mechaniky. Musíme si uvědomit, že se nemění jen pohybová rovnice řídící pohyb těles, ale i samotné veličiny popisující pohyb.

V klasické mechanice se vyskytují zejména dvě veličiny: poloha a rychlost (hybnost) částice v každém bodě trajektorie. Pokud známe tyto dvě veličiny pro všechny částice, stačí nám to k úplnému popisu jejich pohybu. Pohyb je tedy popsán funkcemi času: $\vec{x}(t)$, $\vec{v}(t)$. První z nich rozlišuje, jestli se šíp nachází v luku nebo již byl vystřelen po kořisti. Druhá z nich pak rozlišuje stojící šíp od letícího (což je problém, který trápil Zenóna v antice natolik, že jej nazýval paradoxem).

V kvantové mechanice tyto dvě veličiny nahradíme jedinou funkcí všech prostorových souřadnic a zároveň i času, nazývanou vlnová funkce. Standardně se označuje řeckým písmenem $\psi(\vec{x}, t)$. Oproti klasické poloze a hybnosti navíc může tato vlnová funkce obecně nabývat i komplexních hodnot. Její složitosti se nemůžeme divit, protože je v ní zakódována informace jak o poloze, tak o hybnosti částice. Schválně říkáme zakódována, protože v kvantové mechanice se přesná informace o tom, kde částice jsou nebo jak rychle se pohybují, zcela vytrácí. Dekódovat se mohou pouze pravděpodobnosti, například s jakou se částice na daném místě nachází.

Tato pravděpodobnost je daná jako čtverec absolutní hodnoty vlnové funkce

$$P_{\text{částice} \in \vec{x}} \sim |\psi(\vec{x})|^2.$$

Rovnost zde nepíšeme zcela záměrně, protože uvažovat pravděpodobnost výskytu v jednom konkrétním bodě prostoru je z matematického hlediska ošemetné (bod zabírá nekonečně malou část prostoru, a proto podle matematické logiky pravděpodobnost výskytu v něm nemůže být nenulová). Časovou závislost tu pro jednoduchost explicitně nepíšeme, ale samozřejmě pokud se naše vlnová funkce v čase mění, bude se měnit v čase i tato pravděpodobnost. Odborně se této veličině říká hustota pravděpodobnosti

$$\rho(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2.$$

Pokud tuto hustotu přintegrujeme přes nějakou oblast, získáme pravděpodobnost výskytu částice v této oblasti (podobně jako je hmotnost integrálem z hustoty přes objem)

$$P_{\text{částice} \in (a,b)} = \int_a^b \rho(x) dx.$$

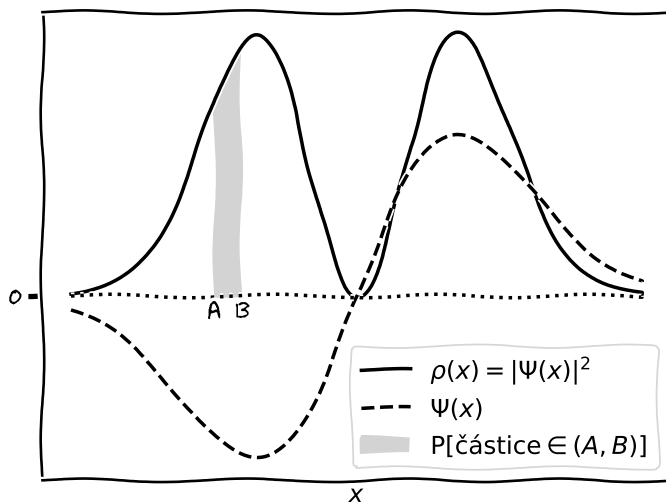
Toto je jednorozměrný příklad, ale ve vícerozměrném případě je to podobné. A pokud vás seznámení s integrály ještě čeká, pak vězte, že to znamená jen spočítat plochu pod nějakou

částí grafu. Pokud by hustota pravděpodobnosti byla ve všech bodech uvažované části prostoru stejná, byla by pravděpodobnost pouhým součinem hustoty a objemu.

Vcelku přirozeným požadavkem je pak to, že chceme, aby celková pravděpodobnost výskytu částice byla 1 (tedy, že částice se zcela určitě někde nachází)

$$P_{\text{Tot}} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{x})|^2 dx = 1,$$

který se nazývá též požadavek normalizace vlnové funkce.



Obr. 3: Vlnová funkce (přerušovaná čára) a hustota pravděpodobnosti (plná čára). Pravděpodobnost, že se částice vyskytuje někde mezi A a B, je pak plocha šedě vybarvené oblasti.

Hybnost je pak zakódována pomocí takzvaného operátoru hybnosti (Co je to operátor si řekneme vzápětí, ale značíme jej stříškou.), který je dán derivací

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

Derivace je matematická operace, která v každém bodě funkce nahradí funkční hodnotu jejím sklonem. Tedy například derivací lineární funkce (jejíž sklon se nemění) je konstantní funkce. Hybnost není možné interpretovat tak jednoduše jako polohu, v tom smyslu, že pomocí operátoru hybnosti nelze jednoduším způsobem zavést hustotu pravděpodobnosti pro hybnost. (A složitý způsob přesahuje rámec tohoto textu.)

Na co ale můžeme (ne úplně rigorózně) nahlédnout, je platnost Heisenbergova principu neurčitosti, tedy že čím přesněji známe polohu částice, tím méně víme o její hybnosti. Když si

představíme, že vlnovou funkci při zachování plochy pod křivkou chceme co nejvíce „splácnout“, aby neurčitost polohy byla malá, zjistíme, že hybnost daná sklonem křivky bude ohromná a bude se hodně měnit. Opačně, pokud chceme mít nízké změny sklonu, vlnová funkce se nám „rozplizne“ do prostoru (ale vlnová funkce s konkrétní hodnotou hybnosti musí být komplexní). To je i podstatou mnoha vědeckých vtipů, například:

Zastaví Heisenberga v autě policista a ptá se

„Víte, jak rychle jste jel?“

„Ne, ale zato vím přesně, kde jsem.“

„No jel jste 95 km/h v obci.“

„Díky, teď jsem se ztratil!“

Nyní již můžeme odpovědět na zásadní otázku, která nám tak trochu zůstala z minulého dílu – proč elektron vlastně nespadne do jádra. Odpověď je prostá, kvůli principu neurčitosti! Kdyby elektron spadl přímo do jádra, měl by sice nejnižší potenciální energii, ale byl by přesně lokalizovaný, takže by nám rostla neurčitost hybnosti nade všechny meze. Kvůli tomu by pak elektron měl nekonečnou kinetickou energii. Proto elektron preferuje takové stavy, kde je neurčitost v poloze a v hybnosti vyvážená.

Konečně rovnice

Když už máme rozumný popis pomocí vlnové funkce $\psi(\vec{x})$ v každém čase, tedy vlastně pomocí funkce prostoru i času $\psi(\vec{x}, t)$, nic nám nebrání zavést časovou Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t). \quad (3)$$

Tu nelze nijak odvodit z klasické fyziky, sám Schrödinger její tvar odhadl z toho, že chtěl, aby její řešení pro částici bez žádného vnějšího potenciálu byly rovinné vlny. To zase byl trochu šťastný tip de Broglieho, jak si jistě pamatujete z minulého dílu. Postupně se pak ukázalo, že tato rovnice dokáže popsat svět okolo nás. Na levé straně této rovnice máme součin imaginární jednotky, redukované Planckovy konstanty a parciální derivace vlnové funkce podle času. Na pravé jsme pro popis systému vypůjčili z teoretické mechaniky operátor hamiltoniánu (\hat{H}), který ale pro rozumné systémy není nic jiného než součet kinetické a potenciální energie. Jeho tvar v kvantové (bez stříšky i v klasické) mechanice je jednoduchý

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

v případě 3D prostoru pak jen druhou derivaci nahradíme Laplaceovým operátorem. Všimněme si, že se nejedná o běžnou fyzikální veličinu, ale operátor (proto ta stříška!). To je matematický objekt, který vezme funkci a udělá z ní jinou funkci (taková „funkce na funkcích“). Jak vidíme, operátor může být například derivace, vynásobení konstantou, umocnění na třetí nebo jiná operace, kterou můžeme s funkcemi dělat. Konkrétně pak hamiltonián vezme libovolnou funkci (narozdíl od zápisu používaného pro působení funkcí nepíšeme funkci na kterou operátor působí do závorek, ale prostě vpravo od operátoru), pak ji nejdříve dvakrát zderivuje, přenásobí ji faktorem $-\frac{\hbar^2}{2m}$ (to odpovídá kinetické energii) a nakonec k výsledku přičte součin potenciálu a původní vlnové funkce (to odpovídá potenciální energii).

Schrödingerova rovnice je o mnoho komplikovanější než ty, se kterými se setkáváte běžně. Je to rovnice, jejímž řešením není číslo, ale rovnou celá funkce, která danou rovnici splňuje (takové rovnice se nazývají diferenciální).

Protože ale řešit tuto rovnici zároveň pro prostorové rozložení a časový vývoj by bylo neúměrně složité, ještě Schrödingera při jejím zavádění rovnou napadlo hledat taková řešení, kde se hustota pravděpodobnosti v čase nemění (v těchto stavech se totiž takový kvantový systém jako třeba atom bude vyskytovat). Je to vlastně podobná myšlenka jako u Bohrova modelu, že jsou povolené jen některé trajektorie. Takové stavy lze snadno najít hledáním řešení ve tvaru

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x),$$

kde E je celková energie systému. Funkci polohy a času $\psi(x, t)$ jsme tak rozložili na součin dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase (část s exponenciálou) a druhá pouze na poloze $\psi(x)$. Vyzkoušejte si, že po dosazení vlnové funkce v tomto tvaru do časově závislé Schrödingerovy rovnice (3) se závislost na čase vykrátí. Dostaneme tak rovnici jen pro prostorovou část vlnové funkce ve tvaru

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \quad (4)$$

kteřá se nazývá bezčasová Schrödingerova rovnice. Výhodou je, že jsme se zbavili nutnosti řešit časový vývoj vlnové funkce, ale platíme za to tím, že naše rovnice obsahuje ještě druhou neznámou – energii odpovídající dané vlnové funkci. Takhle jednoduše se času můžeme zbavit jenom tehdy, když nám hamiltonián nezávisí explicitně na čase. To vlastně ale není tak speciální příklad, naopak většinou se stává, že hledáme pohyb sady částic v nějakém statickém potenciálu. Dokonce, i když počítáme vlnovou funkci celé molekuly, vystačíme si s bezčasovou Schrödingerovou rovnicí. Naopak, když počítáme, jak tato molekula reaguje na oscilující elektrické pole silného laseru, již potřebujeme časově závislou rovnici. (I když i v tomhle případě dost často jde najít nějaké triky, jak tuto časovou závislost obejít.)

Bezčasová Schrödingerova rovnice má z matematického hlediska zajímavý tvar. Hledáme v ní takovou funkci, která po zapůsobení operátoru zůstane až na multiplikatívni konstantu stejná. V matematice se tento proces nazývá hledání vlastních funkcí operátoru. Multiplikatívni konstanta pro danou funkci se označuje jako vlastní číslo. Vlastní čísla jsou pro nás často stejně důležitá, ne-li důležitější než vlastní funkce samy. Matematici si dokonce vypůjčili fyzikální terminologii a sadě všech vlastních čísel se říká spektrum. Triviálním příkladem může být operátor „násobení 7“. Tento operátor funkci vynásobí sedmi, takže jeho vlastními funkcemi jsou všechny funkce. Vlastní číslo na pravé straně je pak samozřejmě sedm. Jiným příkladem může být operátor derivace. Jednou z jeho vlastních funkcí je e^x , neboť derivace exponenciály je exponenciála. Vlastním číslem je v tomto případě jednička. (Další například e^{2x} s vlastním číslem 2.)

Můžeme si rovnou ověřit, že Schrödingerovu rovnici (4) splňují pro volnou částici v 1D prostoru (nepůsobí na ni žádné vnější síly, potenciál je nulový $V(x) = 0$) o hybnosti p (pozor, tu je to konkrétní hodnota, ne operátor) de Broglieho vlny ve tvaru

$$\psi(x) = e^{i\frac{px}{\hbar}}.$$

(Skutečně se jedná o vlny, protože pokud si rozepíšeme komplexní exponenciálu pomocí Moivreovy věty, dostaneme $\cos(\frac{px}{\hbar}) + i\sin(\frac{px}{\hbar})$ a vidíme, že jak reálná, tak imaginární část je periodická, jak bychom od takové vlny čekali.)

Pokud na tuto funkci zapůsobíme hamiltoniánem, dostaneme

$$\hat{H}\psi(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} e^{i\frac{px}{\hbar}} = \frac{p^2}{2m} e^{i\frac{px}{\hbar}}.$$

Asi nás nepřekvapí, že v tomto případě je energie daná klasickým vzorcem $E = p^2/2m$. Všimněme si, že tato rovnice má tím pádem (dokonce 2) řešení pro libovolnou nezápornou hodnotu energie. Uvidíme vzápětí, že jakmile částici „uzavřeme“ potenciálem do nějakého konečného prostoru, tak to platit nebude, a budeme mít jen některé konkrétní „povolené“ hodnoty energie. (Vzpomeňte znovu na Bohrovův atom!) Ještě je dobré poznamenat, že v tomto případě je konkrétní řešení dané jediným reálným parametrem, hybností p , která může nabývat kladných i záporných hodnot. Dokonce, pokud zapůsobíme na vlnovou funkci operátorem hybnosti

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} e^{i\frac{px}{\hbar}} = p e^{i\frac{px}{\hbar}} = p\psi(x),$$

zjistíme, že de Broglieho vlna je vlastní funkcí operátoru hybnosti. To v kvantové mechanice znamená, že má konkrétní hodnotu hybnosti. A aby byly splněny relace neurčitosti, je vlnová funkce rovnoměrně rozprostřena po celé reálné ose.

Nejjednodušší systém s potenciálem, který můžeme studovat, se běžně nazývá nekonečná potenciálová jáma, nebo doslovně překladem anglického označení částice v krabici. V jedno-rozměrném případě interval „krabice“ zvolíme jako $(0, L)$ a potenciál této krabice pak bude

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (0, L) \\ \infty & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \end{cases}.$$

V tomto případě ani nemusíme přímo řešit Schrödingerovu rovnici, ale můžeme vyjít z toho, že známe řešení pro jednotlivé části této rovnice a poslepuvat je. Při slepování musíme dbát pouze na to, aby slepovaná řešení měla stejnou energii a aby výsledná vlnová funkce byla spojitá.

V oblastech s nekonečným potenciálem se částice (ani kvantová) vyskytovat nemůže, vlnová funkce tam tedy bude identicky nulová. Zbývá nám tedy pro řešení jen oblast $x \in (0, L)$. V té ale se částice pohybuje volně, tedy zde bude řešení ve tvaru de Broglieho vln. Pro každou energii máme vždy dvě vlny lišící se jen znaménkem hybnosti (směrem šíření). Zkusíme tedy vlnovou funkci pro $x \in (0, L)$ napsat jako součet dvou vln o zatím neurčené hybnosti se zatím neznámými koeficienty A, B

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A e^{i\frac{px}{\hbar}} + B e^{-i\frac{px}{\hbar}} \\ &= A \left(\cos\left(\frac{px}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) \right) + B \left(\cos\left(\frac{px}{\hbar}\right) - i \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) \right), \end{aligned}$$

kde jsme si roze-psali komplexní exponenciály pomocí Eulerova vzorce atoho, že sinus je lichá a kosinus sudá funkce. Pokud chceme splnit požadavek, aby vlnová funkce byla spojitá v bodě $x = 0$ (tedy chceme, aby $\psi(0) = 0$), musí nám zbýt jen sinové příspěvky, což zajistíme volbou $B = -A$. Nyní musíme splnit požadavek, aby takto upravená vlnová funkce byla spojitá i v bodě $x = L$

$$\psi(x = L) = 2iA \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) = 0.$$

Toho nelze dosáhnout pomocí volby koeficientu A (ten určíme později, aby byla splněná podmínka normalizace), ale musíme najít vyhovující hodnotu hybnosti p . Dosazením do $\psi(L) = 0$ můžeme z vlastností funkce sinus získat požadavek

$$\frac{pL}{\hbar} = k\pi,$$

kde k je libovolné přirozené číslo. Z toho určíme povolené hodnoty hybnosti a dosazením do původní rovnice dostaneme výslednou vlnovou funkci na intervalu $(0, L)$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

kde jsme rovnou zvolili koeficient před sinem tak, aby byla splněna podmínka normalizace – sami si můžete ověřit, že nyní platí

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$$

pro všechna k .

Energie stavů pak získáme působením operátoru hamiltoniánu na vlnovou funkci.

$$\hat{H}\psi(x) = \frac{k^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\psi(x) \rightarrow E_k = \frac{k^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

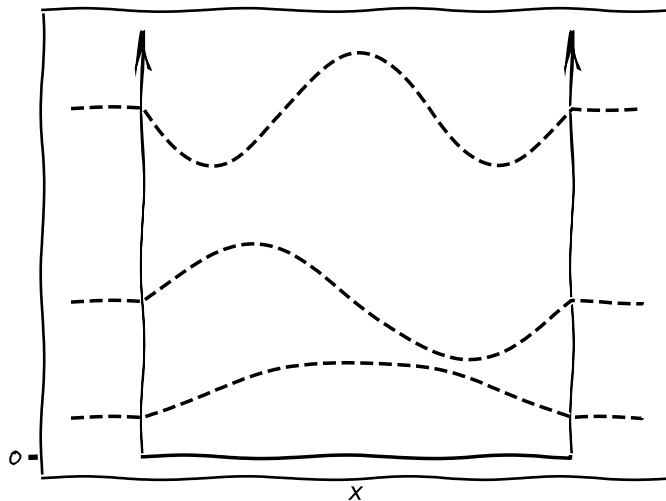
Ve výsledku pak dostáváme sadu vlastních stavů, popsaných pomocí jediného parametru k , který je diskrétní, jeho hodnota může být pouze přirozené číslo. Energie těchto stavů pak je úměrná k^2 .

Všimněme si toho, že najednou nejsou všechny energie dovolené. To souvisí s tím, že částice je uzavřena do potenciálu na omezené ploše. Čímž pádem na ní klademe okrajové podmínky. Zároveň, podobně jako když de Broglieho částice, se chová jako vlna v prostoru. Takto zavřenou částici lze popsat jako stojaté vlnění, podobně jako u struny. Dokonce i pohybové rovnice jsou podobné jako rovnice pro naši vlnovou funkci. A také u struny nakonec vedou k tomu, že nemůže kmitat na libovolné frekvenci, ale má svých konkrétních harmonických frekvencí. No není fyzika krásná, jak je výše?

A pokud byste měli pocit, že se jedná o úplně umělý systém, vězte, že na mnohých místech je takovýto model docela rozumný. Dají se s ním modelovat lineární uhlovodíky s mnoha konjugovanými vazbami, protože elektrony z takovýchto vazeb se mohou celkem volně pohybovat po celé délce tohoto konjugovaného systému (pohyb v jámě), zatímco je pro ně velký problém z molekuly vystoupit (je potřeba překonat vysoký potenciál).

Také se jednoduchou jámou dají popsat kvantové tečky, což jsou mikroskopické kuličky polovodiče, které mají zajímavé optické vlastnosti, například fluorescenci. Tyto vlastnosti navíc nejsou dány chemickým složením kuličky, ale její velikostí, protože tím přirozeně omezí pole působnosti elektronů zodpovědných za vodivost, čímž se jim vnutí konkrétní elektronické stavy podobně jako výše.

Nakonec se sluší zmínit, že pomocí takovéto jámy byla popisována struktura atomových jader, a to ještě předtím, než vůbec byla pořádně rozluštěna povaha sil působících mezi protony a neutrony (a dost často i potom, protože tyto síly jsou matematicky mnohem složitější na výpočty než elektromagnetická interakce mezi elektrony. I dnes je to problém na hraně výpočetních možností superpočítačů.).

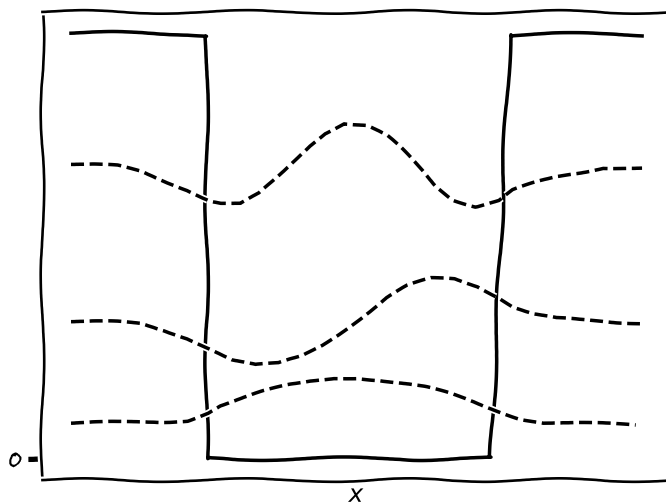


Obr. 4: Graf zobrazující nejnižší 3 stavy nekonečné potenciálové jámy. Plnou čarou je zobrazen potenciál. Vlnové funkce zobrazujeme způsobem, který se v kvantové mechanice běžně používá – vlnové funkce jsou od nuly posunuty svisle o hodnotu odpovídající energii daného stavu. (Tedy v tomto obrázku jsou všechny vlnové funkce mimo jámu nulové, nikoliv jen konstantní, jak by se na první pohled mohlo zdát.)

Nakonec si rychle (bez odvozování) ukážeme, co se stane, pokud potenciál vně jámy bude konečný. To způsobí, že částice, která by předtím měla vlnovou funkci mimo jámu nulovou, najednou může povylézt ven, ačkoliv pravděpodobnost toho klesá exponenciálně se vzdáleností od okraje jámy. Jinak je postup řešení obdobný jako u potenciálové jámy. Pokoušíme se navázat vlnovou funkci tak, aby byla spojitá a aby navazovala hladce („neměla zub“). Matematicky to znamená, že chceme spojitost i v první derivaci. To vede na sadu algebraických rovnic, které ale nejsou analyticky řešitelné. (Klidně si to můžete zkusit!) Zároveň nás asi nepřekvapí, že do takové jámy se nám vejde jen konečné množství stavů. Přesný počet závisí na poměru hloubky a šířky jámy, ale matematicky je zajištěno, že musí být vždy alespoň jeden. Takové stavy nazýváme také vázané. Zbytek stavů má vyšší energii než je hloubka jámy a v zásadě připomínají vlnovou funkci volné částice. (Ale narozdíl od volné částice se mohou na hraně jámy s nějakou pravděpodobností odrazit a letět zpět.)

A co když je elektronů víc?

Když řešíme Schrödingerovu rovnici pro více částic, je situace mnohem komplikovanější, máme pro celý systém jednu vlnovou funkci, ale ta je teď funkcí poloh všech částic. Pro představu pro jednu částici ve 3D prostoru máme diferenciální rovnici pro funkci 3 proměnných, pro dvě



Obr. 5: Vlnové funkce nejnižších stavů konečné potenciálové jámy.

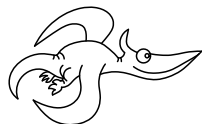
částice 6 a tak dále. To nás obecně zbavuje šance řešit problém na papíře, ale i numericky v počítači, protože běžný přístup funkci reprezentovat pomocí její hodnoty v daných mřížových bodech převede problém na obří soustavu klasických lineárních rovnic.

Když si ale představíme, že prostor v každém směru rozdělíme na 10 bodů, což je ještě velmi hrubé dělení, tak pro jednu částici ve 3D prostoru potřebujeme 1000 bodů, což je pro počítač hračka. Pro dvě částice bodů milion, což běžný počítač ještě schroustá, ale tři už by chtěly bodů miliardu, což jen na uložení chce pár gigabajtů paměti. Čtyři se sotva vejdu na superpočítač, a pro pět už jsou data v řádu petabajtů, což jen tak někde do RAM nedostanete. A teď si vezměte, že jediný atom uranu má elektronů skoro sto!

Nezoufejte, ukážeme si v dalších dílech, že to není tak beznadějně, pokud na problém půjdeme chytřeji. Ale dnes si nakonec lehce zmíníme jedno zjednodušení, které často může dát docela dobrý fyzikální náhled.

Pokud máme sadu částic a zanedbáme interakci mezi nimi, vidí každá z nich stejný potenciál. Pro každou částici pak řešíme Schrödingerovu rovnici zvlášť, takže všechny částice mají stejné vlastní stavy. Poté obsazujeme jednotlivé stavy postupně od nejnižší energie částicemi, tak aby byl splněn Pauliho vylučovací princip, o kterém jste jistě slyšeli v chemii. Pokud máme elektrony, tak po dvou, protože mají ještě spin, který může mířit jedním ze dvou směrů. Celková energie tohoto systému částic v tomto přiblížení je pak daná součtem energií jednotlivých částic, protože jsou neinteragující.

Koneckonců na této myšlence je založená celá periodická soustava prvků. Tam postupně obsazujeme orbitály, které jsou řešením Schrödingerovy rovnice pro jediný elektron.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
		6	6	6	8	8	9	13	10	66	100	110	66
1. Michal Stroff	G, Budějovická, Praha	6	6	8	8	7	9	–	10	54	102	90	54
2. Jiří Preč	G J. A. Komenského, Uh. Brod	6	4	8	8	4	9	–	10	49	92	82	49
3. Damian Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	6	6	6	8	7	0	–	11	44	83	73	44
4. Vojtěch Kubrycht	G, Budějovická, Praha	6	2	6	8	6	2	–	8	38	72	63	38
5. Adam Pustka	G F. X. Šaldy, Liberec	6	6	–	8	6	–	–	10	36	95	60	36
6. Vojtěch Jan Schreib	G Jiřovcova, České Budějovice	4	4	6	8	–	3	–	10	35	78	58	35
7.–8. Matej Karpáč	ZŠ Jána Švermu	6	6	4	4	4	3	–	7	34	64	57	34
7.–8. Kosma Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	6	4	6	0	8	0	–	10	34	64	57	34
9. Patrik Pöschl	G F. X. Šaldy, Liberec	6	4	6	8	–	2	–	3	29	64	48	29
10. Ludmila Šírová	Mensa G, Praha 6	6	4	–	4	3	6	–	3	26	55	43	26
11.–12. Erik Ježek	Smíchovská SPŠ Praha 5	6	6	–	8	–	–	–	–	20	100	33	20
11.–12. Anežka Skupinová	G, Hodonín	6	6	–	8	–	–	–	–	20	100	33	20
13. Vojtěch Novosád	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	6	–	5	8	–	–	–	–	19	95	32	19
14.–15. Nina Vážna	ŠpMNDaG, Bratislava	6	–	4	8	–	–	–	–	18	90	30	18
14.–15. Teo Višňovský	ŠpMNDaG, Bratislava	6	–	4	8	–	–	–	–	18	90	30	18
16. Vít Vycudilík	Gymnázium Oty Pavla, Praha	6	2	–	3	1	5	–	–	17	46	28	17
17.–18. Jakub Hlavenka	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	–	4	–	–	–	–	16	80	27	16
17.–18. Mikuláš Vlčan	SPŠ, Třebíč	6	6	4	–	–	–	–	–	16	89	27	16
19.–20. Barbora Blínová	Podkrušnohorské G, Most	6	–	0	3	1	5	–	–	15	41	25	15
19.–20. Filip Krafcík	G T. Vansovej, Stará Lubovňa	6	2	0	4	–	3	–	–	15	43	25	15
21.–23. Lukáš Franta	G Christiana Dopplera, Praha	6	–	–	8	–	–	–	–	14	100	23	14
21.–23. Klaudia Lalová	G L. Svobodu, Humenné	6	–	–	8	–	–	–	–	14	100	23	14
21.–23. Tomáš Řehák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	–	–	8	–	–	–	–	14	100	23	14
24. Monika Nováková	Reálné G a ZŠ, Prostějov	6	2	0	3	0	2	–	–	13	30	22	13
25. Ondřej Skála	G Volgogradská 6a, Ostrava	6	–	–	3	–	3	–	–	12	52	20	12
26. Gala Dědková	G, Roudnice nad Labem	2	2	1	1	0	2	–	2	10	19	17	10
27.–28. Linda Mičicová	Bilingválne G, Sučany	6	–	–	3	–	–	–	–	9	64	15	9
27.–28. Barbora Salajková	G, Litoměřická, Praha	6	–	–	3	–	–	–	–	9	64	15	9
29.–30. Ján Lakota	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	8	–	–	–	–	8	100	13	8
29.–30. Vojtěch Zielina	G, Třinec	0	2	4	–	–	2	–	–	8	30	13	8
31.–32. Dominik Kaňka	Lepařovo G, Jičín	0	4	–	3	–	–	–	–	7	35	12	7
31.–32. Jakub Učík	G Z. Wintra, Rakovník	6	–	–	1	–	–	–	–	7	50	12	7
33.–37. Petr Barták	Slovenské G, Olomouc	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	10	6
33.–37. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	10	6
33.–37. Pavlína Kuthanová	G a SOŠ Podbořany	2	4	0	–	–	–	–	–	6	33	10	6
33.–37. Helena Muchová	G Jana Keplera, Praha	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	10	6

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
		6	6	6	8	8	9	13	10	66	100	110	66
33.–37. <i>Michal Ševčík</i>	G, Karviná	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	10	6
38. <i>Patricie Labuťová</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	3	–	–	–	–	3	38	5	3
39.–40. <i>Bára Kopačková</i>	G a SOŠ Podbořany	0	2	0	–	–	–	–	–	2	11	3	2
39.–40. <i>Tadeáš Těhan</i>	G Volgogradská 6a, Ost-rava	2	–	–	–	–	–	–	–	2	33	3	2
41. <i>Nela Štešková</i>	G, Na Zatlance, Praha	0	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
		6	6	6	8	8	9	13	10	66	100	110	66
1. <i>Matouš Místa</i>	G, Olomouc-Hejčín	4	6	7	8	8	7	–	11	51	96	85	51
2. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	6	8	4	7	6	–	10	47	89	78	47
3. <i>Jakub Radím Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	6	4	6	7	6	6	–	10	45	85	75	45
4. <i>Sabína Mihulová</i>	G, Nad Alejí, Praha	6	6	8	8	3	2	–	10	43	81	72	43
5. <i>Lujza Lea Lavriková</i>	G, P. Horova, Michalovce	6	6	8	8	4	–	–	6	38	86	63	38
6.–7. <i>Filip Cihlář</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	6	4	6	5	1	5	–	10	37	70	62	37
6.–7. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	6	6	6	4	4	–	–	11	37	84	62	37
8.–10. <i>Zuzana Grycová</i>	G Botičská, Praha	6	6	8	3	3	2	–	8	36	68	60	36
8.–10. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	6	6	8	8	–	–	–	8	36	100	60	36
8.–10. <i>Linda Tománková</i>	G, Boskovice	6	4	8	4	2	4	–	8	36	68	60	36
11. <i>Anna Škrdletová</i>	G, Lovosice	2	6	0	7	3	8	–	9	35	66	58	35
12. <i>Jakub Buzalka</i>	G, Považská Bystrica	6	4	8	7	3	–	–	6	34	77	57	34
13.–14. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	6	2	6	3	3	6	–	5	31	58	52	31
13.–14. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	6	6	6	4	–	0	–	9	31	69	52	31
15. <i>Matěj Pěnička</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	6	6	8	–	–	–	10	30	100	50	30
16.–17. <i>Mária Mederlyová</i>	G Grösslingová, Bratislava	6	4	–	8	–	–	–	11	29	97	48	29
16.–17. <i>Hana Žitňanská</i>	Slovanské G, Olomouc	6	4	1	3	3	5	–	7	29	55	48	29
18. <i>Tomáš Kubrický</i>	G Poštová, Košice	6	6	8	8	–	–	–	–	28	108	47	28
19. <i>Miroslav Pajger</i>	Bilingválne G, Sučany	6	6	7	8	–	–	–	–	27	104	45	27
20.–21. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	6	6	6	8	–	–	–	–	26	100	43	26
20.–21. <i>Soňa Vasilová</i>	G, Kukučínova, Poprad	6	6	6	8	–	–	–	–	26	100	43	26
22.–25. <i>Michal Friml</i>	G Dobruška	6	6	–	3	–	10	–	–	25	86	42	25
22.–25. <i>Martin Uhrin</i>	G Hubeného, Bratislava	6	6	5	8	–	–	–	–	25	96	42	25
22.–25. <i>Martin Zuzek</i>	G Dobruška	6	4	0	4	–	9	–	2	25	56	42	25
22.–25. <i>Ivan Žemlička</i>	G Ústavní, Praha	6	6	6	–	–	–	–	7	25	89	42	25
26. <i>Lukáš Hrdý</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	6	4	6	3	–	2	–	2	23	51	38	23
27. <i>Petra Ivanišová</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	6	4	1	4	–	–	–	7	22	61	37	22
28. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	6	–	6	3	–	–	–	6	21	70	35	21
29.–30. <i>Matyáš Matta</i>	Masarykovo G, Plzeň	6	6	–	8	–	–	–	–	20	100	33	20
29.–30. <i>Tudor Popescu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	6	6	–	8	–	–	–	–	20	100	33	20
31. <i>Lucia Kleščová</i>	G Poštová, Košice	6	4	–	8	–	–	–	–	18	90	30	18
32. <i>Radim Švec</i>	G, Pelhřimov	6	4	–	3	–	4	–	–	17	59	28	17
33.–34. <i>Matyáš Beran</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	2	6	–	–	4	–	–	16	59	27	16
33.–34. <i>Adam Bretšnajder</i>	G Z. Wintra, Rakovník	6	4	6	–	–	–	–	–	16	89	27	16
35. <i>Eduard Plic</i>	Masarykovo G, Plzeň	6	4	–	4	–	–	–	–	14	70	23	14
36. <i>Šimon Zemčák</i>	G Kežmarok	6	4	–	–	–	3	–	–	13	62	22	13
37.–42. <i>Jana Bartoňová</i>	G, Broumov	6	–	6	–	–	–	–	–	12	100	20	12
37.–42. <i>Šimon Borovský</i>	G Grösslingová, Bratislava	0	–	–	8	–	4	–	–	12	52	20	12
37.–42. <i>Gabriela Kotúčková</i>	G PdC, Piešťany	6	–	1	–	–	–	–	5	12	55	20	12
37.–42. <i>Pavel Kučera</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	6	2	1	3	–	–	–	–	12	46	20	12

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
	MFF UK	3	3	6	8	8	9	13	10	60	100	100	60
1. Adam Harmanský	G Poštová, Košice	3	3	8	8	8	9	–	10	49	104	82	49
2. Patrik Stercz	G Poštová, Košice	3	3	6	8	8	8	–	11	47	100	78	47
3.–4. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	3	2	8	8	7	8	–	10	46	98	77	46
3.–4. Jakub Savula	G Jírovcova, České Budějovice	3	2	8	8	7	8	–	10	46	98	77	46
5.–7. Jan Klír	G B. Hrabala	3	3	8	8	8	4	–	10	44	94	73	44
5.–7. Matej Kundrík	G Poštová, Košice	3	3	8	8	4	8	–	10	44	94	73	44
5.–7. Radovan Lev	G F. Palackého, Val. Mez.	3	2	4	8	6	11	–	10	44	94	73	44
8. Martin Mičuch	G Šrobárova, Košice	3	2	8	8	5	7	–	10	43	91	72	43
9. Maroš Jankovič	G V. Nedožerského, SR	3	3	7	8	4	6	–	8	39	83	65	39
10. Jana Mária Zeňuchová	G, P. Horova, Michalovce	3	3	8	8	7	2	–	7	38	81	63	38
11. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	3	3	8	8	2	3	–	9	36	77	60	36
12. Michael Ruman	G V. P. Tótha, Martin	3	3	8	8	–	3	–	9	34	87	57	34
13.–14. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	3	2	6	8	–	5	–	9	33	85	55	33
13.–14. Martin Marcinčák	G Šrobárova, Košice	3	3	8	8	4	7	–	–	33	89	55	33
15. Ondřej Kadlec	G, Moravský Krumlov	2	3	6	8	3	7	–	10	32	84	53	32
16.–17. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	3	3	–	8	8	–	–	9	31	97	52	31
16.–17. Monika Drexlerová	G, Rožnov pod Radhoštěm	3	1	4	8	4	5	–	6	31	66	52	31
18.–19. Lukáš Linhart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	3	3	8	4	2	–	–	10	30	79	50	30
18.–19. Jiří Sýkora	G, Trhové Sviny	3	2	4	8	4	–	–	9	30	79	50	30
20.–21. Matej Bryja	G D. Tatarku, Poprad	3	2	6	8	2	3	–	5	29	62	48	29
20.–21. Jan Strnad	G, Postupická, Praha	3	3	0	2	5	6	–	10	29	62	48	29
22. Martin Kubánek	G, Roudnice nad Labem	3	2	6	8	–	–	–	8	27	90	45	27
23. Veronika Plevná	G, Cheb	3	3	6	8	–	6	–	–	26	90	43	26
24.–25. Klaudia Sýkorová	G Poštová, Košice	3	–	8	3	3	–	–	8	25	71	42	25
24.–25. Tomáš Vysoký	G Poštová, Košice	3	2	6	8	–	–	–	6	25	83	42	25
26.–27. Kamila Cidlinská	G Botičská, Praha	3	–	1	4	3	3	–	10	24	55	40	24
26.–27. Tadija Jelesijević	Ginnazija Kruševac	3	3	8	3	7	–	–	–	24	86	40	24
28. Barbora Klusáková	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	3	8	8	–	–	–	–	22	110	37	22
29. David Ševčík	G, Uherské Hradiště	3	2	–	3	–	4	–	9	21	64	35	21
30. Timotej Vida	G V. Nedožerského, SR	3	3	6	8	–	–	–	–	20	100	33	20
31. Lachyn Hydyrova	86th specialized school, TM	3	1	1	3	3	2	–	6	19	40	32	19
32. Iren Kishinevskaya	Slovanské gymnázium Praha 5 - Ko	3	1	6	3	0	0	–	5	18	38	30	18
33.–34. Filip Hošek	Masarykovo klasické G, Říčany	3	–	4	8	2	–	–	–	17	68	28	17
33.–34. Cristina Mihaela Rău	CNI Tudor Vianu, Romania	3	–	–	8	3	3	–	–	17	61	28	17
35.–36. Šimon Kala	G, Roudnice nad Labem	3	3	1	8	–	–	–	–	15	75	25	15
35.–36. Julie Krížková	Wichterlovo G, Ostrava	3	1	6	–	–	–	–	5	15	68	25	15
37. Anna Kopecká	G a SOŠ, Jilemnice	3	1	6	3	–	–	–	–	13	65	22	13
38.–40. Ondřej Kopeček	G, Lesní čtvrť, Zlín	2	2	1	–	–	–	–	7	12	55	20	12
38.–40. Lukáš Müller	Podkrušnohorské G, Most	3	1	0	8	–	–	–	–	12	60	20	12
38.–40. Jan Zrůst	G Botičská, Praha	–	–	7	–	–	–	–	5	12	67	20	12
41.–47. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	–	6	–	–	2	–	–	11	61	18	11
41.–47. Petr Dymanus	G, Špitálská, Praha	3	1	–	4	1	2	–	–	11	35	18	11
41.–47. Šimon Kiriňak	G Poštová, Košice	3	–	–	8	–	–	–	–	11	100	18	11
41.–47. Pavol Alexander Komolš	G Poštová, Košice	3	–	–	8	–	–	–	–	11	100	18	11

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	8	8	9	13	10	60	100	100	60
1. <i>Jakub Ježek</i>	G B. Němcové, HK	3	3	8	8	7	5	–	11	45	96	75	45
2. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	2	3	6	8	6	8	–	9	42	89	70	42
3. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	6	8	4	8	–	10	41	87	68	41
4. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	3	3	8	8	7	–	–	10	39	103	65	39
5. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Li- bereg	3	3	8	8	5	–	–	10	37	97	62	37
6. <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	3	3	6	8	–	8	–	3	31	79	52	31
7. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	3	1	4	4	3	9	–	6	30	64	50	30
8.–9. <i>Vladimíra Brabcová</i>	SPŠ Ostrov n. Ohří	3	2	8	8	7	–	–	–	28	100	47	28
8.–9. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	3	3	4	8	2	8	–	–	28	76	47	28
10.–12. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	3	2	6	8	–	8	–	–	27	93	45	27
10.–12. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	3	1	4	6	–	6	–	7	27	69	45	27
10.–12. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	3	3	8	8	–	–	–	10	27	90	45	27
13.–15. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	3	1	–	3	4	5	–	10	26	63	43	26
13.–15. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	2	4	4	3	8	–	2	26	55	43	26
13.–15. <i>Rudolf Žizka</i>	G, Brno-Řečkovice	3	2	1	4	6	–	–	10	26	68	43	26
16. <i>Jakub Kopcil</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	6	8	–	6	–	–	25	86	42	25
17. <i>Jakub Vyskočil</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	3	1	8	3	3	6	–	–	24	65	40	24
18. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	3	1	–	8	–	–	–	11	23	96	38	23
19. <i>Adam Juttner</i>	G, Nový Jičín	3	1	3	3	1	3	–	8	22	47	37	22
20. <i>Jakub Gerža</i>	G Dobruška	3	2	8	8	–	–	–	–	21	105	35	21
21.–22. <i>Josef Lezna</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	3	3	6	8	–	–	–	–	20	100	33	20
21.–22. <i>David Škrob</i>	SPŠ a VOŠT Brno	3	2	3	–	–	6	–	6	20	65	33	20
23.–27. <i>Maxim Arkhipov</i>	G, Voděradská, Praha	2	1	–	4	–	1	–	11	19	58	32	19
23.–27. <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	3	3	–	8	5	–	–	–	19	86	32	19
23.–27. <i>Filip Liška</i>	1. súkromné G v Bratislave	3	1	1	4	1	2	–	7	19	40	32	19
23.–27. <i>Dzenan Midzic</i>	JU Gimnazija Bihać, BiH	3	1	–	8	7	–	–	–	19	86	32	19
23.–27. <i>Eduard Mrug</i>	G Grösslingová, Bratislava	3	–	8	8	–	–	–	–	19	112	32	19
28. <i>Radek Košinár</i>	G Brno, tr. Kpt. Jaroše	3	2	6	3	4	–	–	–	18	64	30	18
29.–32. <i>Martin Hraba</i>	G, Benešov	3	3	6	3	–	–	–	–	15	75	25	15
29.–32. <i>Nikola Kadlecková</i>	G, nám. TGM, Zlín	3	–	6	–	–	2	–	4	15	54	25	15
29.–32. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	3	1	3	–	–	–	–	8	15	68	25	15
29.–32. <i>Emilija Zdravković</i>	Gimnazija Kruševac	3	3	6	3	0	–	–	–	15	54	25	15
33. <i>Robin Rádek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	3	3	6	–	–	–	–	–	12	100	20	12
34. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	3	–	1	5	–	2	–	–	11	42	18	11
35. <i>Dovletgeldi Merdanov</i>	86th specialized school, TM	3	1	–	3	2	–	–	–	9	41	15	9
36.–37. <i>Michal Almáši</i>	G, Park mládeže, Košice	–	–	7	–	–	–	–	–	7	88	12	7
36.–37. <i>Martin Bánský</i>	G Fr. Švantnera	3	1	–	3	–	–	–	–	7	50	12	7
38. <i>Natália Čigašová</i>	G Poštová, Košice	3	1	–	–	–	–	–	–	4	67	7	4
39.–42. <i>Vojtěch Marek</i>	Biskupské G, Brno	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	5	3
39.–42. <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	5	3
39.–42. <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	5	3
39.–42. <i>Anna Vodáková</i>	G, Litovel	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	5	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

 /FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.