

Úloha I.3 ... zavařujeme

6 bodů; (chybí statistiky)

Do válcové sklenice o výšce $h = 7,0$ cm a vnitřním poloměru $r = 2,5$ cm nalijeme horkou meruňkovou marmeládu o teplotě $T_0 = 80$ °C, zavřeme ji víčkem a necháme chladnout, přičemž mezi marmeládou a víčkem je ve sklenici trochu vzduchu. Víčko se může lehce promáčknout dovnitř, když na něj působí alespoň síla $F = 4$ N. Při promáčknutí se ozve zvuk, který jsme slyšeli po čase $t_p = 30$ min od zavření skleničky. Jestliže marmeláda tuhne při teplotě $T_t = 60$ °C, bude již při promáčknutí víčka ztuhlá?

Bonus Jak dlouho po začátku chladnutí marmeláda ztuhne? Předpokládejme, že teplota je v celé sklenici všude stejná a rychlost chladnutí závisí pouze na rozdílu teplot ve sklenici a okolní teploty $T_{ok} = 25$ °C. *Jardovi letos pomrzly meruňky, tak vzpomíná na jiné roky.*

Nejprve si rozeberme, co se vlastně děje. Při nalití do sklenice má marmeláda teplotu T_0 . Trocha vzduchu nad ní se ohřeje na stejnou teplotu – tu si uchová i bezprostředně po uzavření víčkem. Ve sklenici je tedy na počátku vzduch o teplotě T_0 a atmosférickém tlaku p_0 . Sklenice (a vzduch v ní) začne chladnout. Před promáčknutím se objem vzduchu nemění, dochází k izochorickému ochlazování.

K promáčknutí víčka dojde v okamžiku, kdy na něj působí síla F , která je daná rozdílem tlaků vzduchu uvnitř a vně sklenice

$$F = (p_0 - p_p) S \quad \Rightarrow \quad p_p = p_0 - \frac{F}{S},$$

kde plocha víčka je $S = \pi r^2$ a p_p je tlak uvnitř sklenice, při kterém dojde k promáčknutí.

Jednoduchou trojčlenkou (Charlesův zákon) vyjádříme teplotu vzduchu uvnitř sklenice při promáčknutí jako

$$T_p = T_0 \frac{p_p}{p_0} = T_0 \left(1 - \frac{F}{\pi r^2 p_0} \right) \doteq 346 \text{ K} \doteq 73 \text{ °C}.$$

Teplotu nesmíme zapomenout do vzorce udávat v Kelvinech. Při promáčknutí víčka tak má marmeláda teplotu stále asi 73 °C.

Bonus

Tuto vypočtenou teplotu měla marmeláda po čase t od začátku chladnutí. Pokud budeme znát časový vývoj teploty sklenice, můžeme nalézt čas, kdy marmeláda bude mít teplotu tuhnutí. Předpoklad, že rychlost ochlazování sklenice je úměrná rozdílu její teploty a teploty okolí, můžeme zapsat ve tvaru diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ok}),$$

kde k je konstanta udávající, jak rychle se sklenice ochlazuje, a T je teplota sklenice. Rovnici vyřešíme separací proměnných a integrací

$$T = (T_0 - T_{ok}) e^{-kt} + T_{ok},$$

kde jsme konstantu před exponenciálou našli tak, aby teplota sklenice a marmelády v čase $t = 0$ byla rovna T_0 .

Jediný parametr, který ve funkci $T(t)$ neznáme, je k . Známe ovšem teplotu sklenice v čase $t_p = 30$ minut, pro kterou platí

$$T_p = (T_0 - T_{ok}) e^{-kt_p} + T_{ok} \Rightarrow k = \frac{1}{t_p} \ln \frac{T_0 - T_{ok}}{T_p - T_{ok}}.$$

Jestliže teplota tuhnutí je T_t , pak pro ni platí

$$T_t = (T_0 - T_{ok}) e^{-kt_t} + T_{ok} \Rightarrow t_t = t_p \frac{\ln \frac{T_0 - T_{ok}}{T_t - T_{ok}}}{\ln \frac{T_0 - T_{ok}}{T_p - T_{ok}}}.$$

Po dosazení za teplotu T_p dostáváme čas ztuhnutí marmelády jako

$$t_t = t_p \frac{\ln \frac{T_0 - T_{ok}}{T_t - T_{ok}}}{\ln \frac{T_0 - T_{ok}}{T_0 \left(1 - \frac{F}{\pi r^2 p_0}\right) - T_{ok}}} \doteq 98 \text{ min}.$$

Marmeláda ztuhne po 98 minutách od zavření víčka.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.