Úloha III.P ... absurdní kyvadlo

9 bodů; průměr 5,88; řešilo 67 studentů

Jaké jevy mohou ovlivnit měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla? Odhadněte, kolik platných cifer by musel obsahovat váš výsledek, abyste je naměřili. Uvažujte i jevy, které běžně zanedbáváte. *Kačka přemýšlela, co všechno může napsat do diskuze.*

Skutečné změny tíhového zrychlení

První skupinou jevů, kterou se budeme zabývat, jsou skutečné změny tíhového zrychlení, tedy vlivy, které bychom zaznamenali i sebedokonalejším přístrojem. Prvním rozdílem od tabelované hodnoty $9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ jsou lokální rozdíly dle místa měření.

Změny dle zeměpisné šířky Protože Země není přesná koule, ale je to takzvaný *geoid*, tedy nepravidelný útvar, který budeme v prvním přiblížení považovat za elipsoid s rovníkovým poloměrem $R_\mathrm{r} = 6\,378\,\mathrm{km}$ a polárním poloměrem $R_\mathrm{p} = 6\,357\,\mathrm{km}$,[1] budou se i tíhová zrychlení lišit v rozdílu gravitačního zrychlení, protože dle zeměpisné šířky jsme jinak daleko od centra Země. Pokud budeme uvažovat veškerou hmotnost soustředěnou v centru Země, můžeme spočítat v obou případech gravitační zrychlení. Hmotnost Země je $M_\mathrm{Z} = 5{,}973\,6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, tedy gravitační zrychlení na pólu bude

$$g_\mathrm{pól} = G\frac{M_Z}{R_p^2} = 6{,}674\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}\cdot\frac{5{,}973\,6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6\,357\,\mathrm{km})^2} \doteq 9{,}865\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

a na rovníku bude

$$g_\mathrm{rov} = G\frac{M_Z}{R_p^2} = 6{,}674\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}\cdot\frac{5{,}973\,6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6\,378\,\mathrm{km})^2} \doteq 9{,}801\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Jelikož tíhová síla je výslednicí gravitační a odstředivé síly otáčení Země, bude mít tíhové zrychlení různou hodnotu na různých zeměpisných šířkách. Na pólu nepůsobí žádné odstředivé zrychlení, zatímco na rovníku o rovníkovém poloměru $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ je odstředivé zrychlení velikosti

$$a_\mathrm{ods} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{(1\,\mathrm{den})^2}\cdot 6378\,\mathrm{km} \doteq 0{,}03\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Zeměpisná šířka má tedy na tíhové zrychlení vliv v řádu setin $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, musíme tedy měřit alespoň na tři platné cifry, abychom tento vliv naměřili.

Změny dle nadmořské výšky Změny dle nadmořské výšky budeme počítat stejně jako jsme počítali změnu dle zeměpisné šířky, tedy s modelem hmoty soustředěné v centru a pro dva body na rovníku, a to hladinu moře s poloměrem $R_\mathrm{r} = 6\,378\,\mathrm{km}$ a vrchol Cayambe, který je téměř na rovníku a má nadmořskou výšku 5 790 m. n. m.,[2] tedy jeho poloměr je $R_\mathrm{Cay} =$

[1] `https://is.muni.cz/el/1441/podzim2007/ZS1BP_IVZ1/um/02.Tvar_a_velikost_Zeme.pdf`
[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Cayambe

$= 6\,383{,}79\,\mathrm{km}$. Tíhové zrychlení na hladině moře z předchozího příkladu máme a je $g_0 = 9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - 0{,}03\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}77\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, tíhové zrychlení na Cayambe je

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{Cay}} &= G\frac{M_Z}{R_{\mathrm{Cay}}^2} - \omega^2 R_{\mathrm{Cay}} = \\ &= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}} \cdot \frac{5{,}9736 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6\,383{,}79\,\mathrm{km}^2} - \frac{4\pi^2}{1\,\mathrm{den}^2} \cdot 6\,383{,}79\,\mathrm{km} \doteq \\ &\doteq 9{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - 0{,}03\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = \\ &= 9{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \end{aligned}$$

rozdíl je tedy opět na druhém desetinném místě. Pro menší výškové rozdíly v řádu stovek metrů bude rozdíl na třetím desetinném místě.

Vliv podloží Kromě zeměpisné šířky a nadmořské výšky má vliv i podloží a reliéf okolí. Dle geologického učebního materiálu[3] budou změny tíhového pole způsobené hlubinnými změnami, jako například podzemním ložiskem ropy řádu $10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, pro jejich určení tedy musíme měřit s přesností na 7 platných cifer.

Kosmické okolí Nyní jsme již zanedbali všechny vlivy pocházející ze Země a lokace bodu na ní. Podíváme se tedy dále, a to do kosmu. Objekty zde jsou sice velmi daleko, ale jsou také velmi hmotné a některé z nich mají nezanedbatelný vliv na těleso Země. Změny tíhového zrychlení způsobené těmito tělesy spočítáme jako rozdíl jejich gravitační síly na bod ve středu Země pro různé vzdálenosti daných těles. Spočítáme tedy rozdíl gravitačního zrychlení od tohoto tělesa v obou těchto polohách, kde gravitační zrychlení spočítáme dle vzorce

$$g = G\frac{M}{r^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}}$ je gravitační konstanta, M je hmotnost daného tělesa a r je jeho vzdálenost od Země. Výsledky pro vybraná tělesa jsou uvedeny v tabulce 1.

Tab. 1: Vliv kosmických těles na tíhové zrychlení

těleso	$\frac{M}{\mathrm{kg}}$	menší vzdálenost	větší vzdálenost	$\frac{\Delta g}{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$
Měsíc	$7,35 \cdot 10^{22}$	365 033 km	407 241 km	$7 \cdot 10^{-6}$
Slunce	$1,99 \cdot 10^{30}$	147 098 074 km	152 097 701 km	$4 \cdot 10^{-4}$
Mars	$6,42 \cdot 10^{23}$	0,5 AU	2,5 AU	$6 \cdot 10^{-9}$
Jupiter	$1,90 \cdot 10^{27}$	4,2 AU	6,2 AU	$2 \cdot 10^{-7}$
Pluto	$1,30 \cdot 10^{23}$	38 AU	40 AU	$3 \cdot 10^{-13}$

V této tabulce bylo použito hodnot hmotností a vzdáleností z Wikipedie[4], kde pro Slunce a Měsíc používáme vzdálenost perihelia a afélia, respektive perigea a apogea, zatímco pro planety používáme součet a rozdíl střední poloosy dané planety a Země.

[3] https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Z0135/um/Uvod_06_Tihove_pole.pdf
[4] https://cs.wikipedia.org/

Nyní ještě můžeme porovnat vliv těchto kosmických těles s gravitačním vlivem malých velmi blízkých těles. Pro člověka o hmotnosti $M = 80\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{m}$ je gravitační zrychlení přibližně $\Delta g = 5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a pro kamion o hmotnosti $M = 40\,\mathrm{t}$ ve vzdálenosti $r = 50\,\mathrm{m}$ je gravitační zrychlení přibližně $\Delta g = 1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, tedy porovnatelně s vlivem člověka nebo Marsu.

Slapové síly V předcházejícím odstavci jsme počítali vliv kosmických těles na bod ve středu Země. Tyto síly jsou však již zahrnuty do pohybu Země ve sluneční soustavě pomocí změn trajektorie. Co však má na měření na povrchu vliv, je slapová síla daná tím, že gravitační síla od jednotlivých těles není stejná na povrchu Země jako v jejím středu. Velikost slapové síly je tedy úměrná gradientu gravitační síly. V přímce procházející středy obou těles pozorujeme slapové zrychlení

$$\frac{2GMr}{R^3}\,,$$

kde M je hmotnost daného tělesa, r je poloměr Země, R je vzdálenost Země od daného tělesa a M je hmotnost tohoto tělesa. Po dosazení hodnot pro Měsíc dostáváme $\Delta g \approx 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a pro Slunce $\Delta g \approx 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.[5] Tyto síly jsou sice malé, ale i tak pozorovatelné v podobě přílivu, odlivu a rozdílů v jeho výšce dle fáze Měsíce. Tento vliv je řádově menší než vliv daných rozdílů gravitace na střed Země, obvzlášť pro vzdálenější objekty jako Slunce (vzhledem k závislosti na její třetí mocnině). Předpokládejme tedy, že vliv ostatních těles bude také řádově nižší než jejich přímý vliv na střed Země. Pokud tělesa okolo sebe rotují, je třeba připočítat ještě vliv odstředivé síly, který je přibližně poloviční.[6]

Systematické problémy matematického kyvadla

Skutečné změny tíhového zrychlení máme rozebrané, nyní se podíváme na systematické chyby měření matematickým kyvadlem. Pro náš příklad budeme uvažovat, že naše kyvadlo je realizováno železnou koulí o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$, které je uvázáno na ocelové struně tak, že vzdálenosti jejího těžiště od závěsu jsou $l = 2\,\mathrm{m}$.

Matematické kyvadlo, přesnost parametrů V modelu matematického kyvadla pak pro periodu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Z měření periody tedy vypočítáme tíhové zrychlení jako

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}\,.$$

Podívejme se tedy, s jakou přesností bychom museli měřit periodu a délku závěsu, abychom dosáhli dané přesnosti. Z teorie přenosu chyb lze určit, že relativní nejistota měření délky závěsu a tíhového zrychlení budou stejné, tedy abychom například zvládli změřit odchylky tíhového zrychlení řádu $10^{-9}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, musíme dosáhnout relativní přesnosti 10^{-10}, tedy bychom museli měřit závěs s přesností $10^{-10}\,\mathrm{m}$, což je řádově rozměr atomu. Přesnost měření času je zde ještě podstatnější, protože dle přenosu chyb by pro pouze tuto chybu byla relativní

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_force#Sun,_Earth,_and_Moon
[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Slapov%C3%A1_s%C3%ADla

chyba měření tíhového zrychlení dvojnásobná oproti relativní chybě měření periody. Pokud bychom např. chtěli dosáhnout přesnosti měření g do řádu $10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (pro délku už teoreticky možné, bylo by třeba měřit na mikrometry), museli bychom mít relativní přesnost měření periody $5\cdot 10^{-6}$, což pro naše kyvadlo s periodou přibližně 2,8 s dává nejistotu měření času přibližně $10^{-5}\,\mathrm{s}$. Pro měření stopkami s možnou přesností měření 0,1 s by to tedy znamenalo měřit 10^4 kmitů, což by s danou periodou zabralo asi 8 hodin. Pro takto dlouhou dobu už by se kyvadlo pravděpodobně působením dalších vlivů zastavilo. Pro dosažení požadované přesnosti pro měření 100 kmitů (5 minut) bychom tedy potřebovali měřit s přesností alespoň na 0,001 s.

Matematické kyvadlo, změny délky Abychom měli délku stabilizovanou na mikrometry, musíme uvážit jevy, které by ji mohly měnit, a to teplotní roztažnost a pružné napínání. Změna délky vlivem délkové teplotní roztažnosti se spočítá jako

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T\,,$$

kde l_0 je původní délka, ΔT je změna teploty a α je koeficient délkové teplotní roztažnosti. Jeho velikost nalezneme například v tabulkách[7] a vidíme, že jeho velikost je například pro ocel $11\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$, tedy pro bychom potřebovali udržovat přesnou teplotu na desetiny stupně, zatímco pro polyethylen je více než desetkrát větší, tedy tady bychom potřebovali udržovat teplotu na setinu stupně.

Druhý vliv je změna napěťové síly natahující lano vlivem kývání kyvadla. Pokud uvážíme maximální výchylku kyvadla $5\,^\circ$, budou změny tahové síly řádově

$$\Delta F = mg(1-\cos\varphi) \approx 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

Pro přepočet na změnu délky použijeme vztah popisující pružnost $\Delta l = k\Delta F$, kde k vyjadřuje tuhost, kterou vypočteme jako $k = l_0/(ES)$, kde S je průřez vlákna a E je modul pružnosti v tahu. Předpokládejme tloušťku vlákna $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ a kruhový průřez a modul pružnosti v tahu oceli[8] $E = 220\,\mathrm{GPa}$. Pro změnu délky pak dostáváme

$$\Delta l = \frac{l_0}{ES}\Delta F \approx 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot N^{-1}}\cdot 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} \approx 4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\,.$$

Abychom dosáhli přesnosti 10^{-6} potřebovali bychom úhel maximálně $0{,}1\,^\circ$, což by dávalo průmět kyvu do vodorovného směru přibližně 3 mm.

Fyzikální kyvadlo Nyní se podíváme na náš model fyzikálního kyvadla, tedy už nebudeme považovat naše kyvadlo za hmotný bod na nehmotném závěsu, ale za tuhou kouli a tuhou tyč (obojí z oceli). Pro dobu kmitu fyzikálního kyvadla platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,, \tag{1}$$

kde l je vzdálenost těžiště od bodu otáčení a I je moment setrvačnosti kolem osy otáčení. Když uvážíme hustotu oceli $\rho = 7\,850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, spočítáme hmotnost vlákna modelovaného tuhou tyčí $m_\mathrm{v} = 0{,}12\,\mathrm{g}$ a poloměr koule $r = 3{,}12\,\mathrm{cm}$. Změna polohy těžiště vlivem vlákna bude

[7] `http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/tepelna-kapacita-roztaznost.`

[8] `http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/modul-pruznosti.php`

asi 0,1 mm. Moment setrvačnosti vyjádříme jako součet momentu setrvačnosti tuhé tyče $I_\mathrm{t} = m_\mathrm{v}(l-r)^2/3$ a moment setrvačnosti koule $I_\mathrm{k} = 2m_\mathrm{k}r^2/5$, který ovšem musíme posunout o vzdálenost středu koule od těžiště l pomocí Steinerovy věty. Nyní vyjádříme z rovnice (1) tíhové zrychlení a dosadíme za všechny veličiny:

$$\begin{aligned}
g = 4\pi^2 \frac{I}{mlT^2} &= \\
&= 4\pi^2 \frac{\frac{2}{5}mr^2 + ml^2 + \frac{1}{3}m_\mathrm{v}(l-r)^2}{(m+m_\mathrm{v})\left(l - \frac{m_\mathrm{v}l}{2(m+m_\mathrm{v})}\right)T^2} = \\
&= 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \frac{\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + 1 + \frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{v}}{m}\left(1-\frac{r}{l}\right)^2}{\left(1+\frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\left(1-\frac{m_\mathrm{v}}{2(m+m_\mathrm{v})}\right)} = \\
&= g_0 \frac{\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + 1 + \frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{v}}{m}\left(1-\frac{r}{l}\right)^2}{\left(1+\frac{m_\mathrm{v}}{m}\right)\left(1-\frac{m_\mathrm{v}}{2(m+m_\mathrm{v})}\right)} \approx \\
&\approx 1{,}000\,076 g_0
\end{aligned}$$

Rozdíl naměřeného tíhového zrychlení při započtení modelu fyzického kyvadla je tedy řádově $7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Další otázkou by bylo, jak přesně by musely být měřeny konkrétní veličiny vystupující ve výpočtu. Zde bychom postupovali opět metodou přenosu chyb, ovšem pro komplikovanost výpočtu pro takto složitý vzorec to zde nebudeme počítat.

Vliv odporu vzduchu Jak jsme určili v minulém bodě, závaží bude mít nenulový rozměr, tedy při jeho pohybu ve vzduchu na něj bude působit odporová síla. Abychom mohli použít teorii tlumeného kmitání, budeme uvažovat, že odporová síla je přímo úměrná rychlosti tělesa, tedy obtékání je laminární a pro odporovou sílu můžeme psát

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\mu r v\,,$$

kde r je poloměr koule a μ je dynamická viskozita vzduchu, která má hodnotu asi $\mu = 1{,}9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$ a je silně teplotně závislá. Pohybová rovnice má tedy nyní tvar

$$I\ddot{\varphi} + 6\pi\mu r l\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0\,,$$

který po linearizaci a vydělení momentem setrvačnosti upravíme na

$$\ddot{\varphi} + \frac{6\pi\mu r l}{I}\dot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\sin\varphi = 0\,,$$

což identifikujeme jako tvar rovnice pro tlumené kmitání $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ s parametry $\delta = 3\pi\mu r l^2\dot{\varphi}/I$ a $\omega_0^2 = mgl/I$. Takovýto systém bude mít vlastní frekvenci ω modifikovanou, a to

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,,$$

z čehož vypočítáme modifikovanou periodu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \delta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2 T_0^2}{4\pi^2}}} \approx 1{,}000\,001 T_0$$

Odpor vzduchu tedy dává relativní změnu periody 10^{-6}, tedy relativní změnu měřeného tíhového zrychlení přibližně dvojnásobnou, přibližně $2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Amplituda pak klesá jako $e^{-\delta t}$, charakteristická konstanta útlumu (kdy se zmenší amplituda na $1/e$) je přibližně $1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \doteq$ $\doteq 50\,\mathrm{h}$. Na zmenšení amplitudy tedy bude mít větší vliv tření v závěsu než odpor vzduchu.

Dalšími zdroji, které by zde mohly hrát roli je teplotní roztažnost koule nebo vliv změn teploty a tlaku na hustotu a dynamickou viskozitu vzduchu. Ty však opět nebudeme pro přílišnou náročnost explicitně počítat.

Vliv anharmonicity Při řešení rovnice harmonického oscilátoru užíváme aproximaci $\sin \varphi =$ $= \varphi$, která platí pro malé výchylky. Když však budeme chtít mít pro výchylky větší přesnost, můžeme použít rozvoj sinu do vyššího řádu, tedy $\sin \varphi = \varphi + \varphi^3/6$, což nám dává řešení pro periodu[9]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) .$$

To nám pro maximální úhel $5\,^\circ$ dává relativní změnu periody přibližně $5 \cdot 10^{-4}$, tedy pro tíhové zrychlení dává rozdíl oproti jednoduchému výpočtu rozdíl řádu $10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Pokud bychom chtěli ještě přesnější výsledek, můžeme použít rozvoj sinu do ještě vyššího řádu, pro ty však už nemáme přesné analytické řešení. Maximální úhel ale není stále stejný, ale vlivem odporu vzduchu se postupně zmenšuje, tedy ani řešení z části Anharmonicita není přesné.

Další vlivy Dalším podstatným vlivem (viz sekce Vliv odporu vzduchu) je odpor v závěsu, který je ale složité kvantifikovat. Protože však z praxe víme, že kyvadlu trvá zmenšit svou amplitudu na třetinu méně než 50 h, bude rozhodně nezanedbatelný. Dalším vlivem, který bychom museli kontrolovat, je proudění vzduchu v místnosti. To by mělo být ideálně nulové, ale dosáhnout toho je technicky velmi obtížné, tedy bychom se alespoň snažili mít jej stabilní. Stabilitu proudění však může narušit už i pohyb experimentátora či jiných osob v místnosti.

Závěr

V první části řešení jsme si ukázali, jak velký vliv mají jednotlivé skutečné změny tíhového zrychlení. V druhé části jsme se pak podívali, jaké všechny úvahy a korekce bychom museli zahrnout, abychom dané přesnosti skutečně dosáhli. Vidíme, že z našeho modelu 1 kg závaží na 2 m závěsu nejsme schopni kvůli přesnosti měření délky a času měřit s větší přesností než na $10^{-6}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, což je řádově ovlivněno složením podloží se započtením přesné zeměpisné polohy i nadmořské výšky. Měření vlivu kosmických těles je pak zcela mimo naše rozlišovací možnosti. K dosažení přesnosti na $10^{-6}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pak ale kromě velmi přesného měření vstupních parametrů a hlídání jejich změn musíme započítat i to, že jde o fyzické kyvadlo, které je tlumeno odporem vzduchu, a dokonce je třeba i započíst nepřesnost linearizace problému. Měřit veličiny velmi

[9] `https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_(Dourmashkin)/24%3A_Physical_Pendulums/24.04%3A_Appendix_24A_Higher-Order_Corrections_to_the_Period_for_Larger_Amplitudes_of_a_Simple_Pendulum`

přesně je tedy velice složité nejen z praktického hlediska a potřeb pečlivého měření a přesné aparatury, ale narážíme i na hranice použité teorie.

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.