Úloha IV.5 ... vesmírná návštěva

9 bodů; průměr 4,64; řešilo 55 studentů

Dva mimozemšťané bydlí každý na své kosmické stanici. Stanice se nacházejí ve volném prostoru a vzdálenost mezi nimi je L. Když chce jeden mimozemšťan navštívit druhého, musí nasednout do své nerelativistické rakety a doletět k sousedovi. Jaký nejkratší čas může mimozemšťan strávit na cestě tam i zpět? Hmotnost rakety s palivem je m, bez paliva m_0. Výtoková rychlost spalin je u, tok paliva je libovolný. Jeho soused mu žádné palivo načerpat nedovolí (sám má málo). *Jarda potřeboval, aby si nikdo nevšiml, že na chvíli zmizel z porady.*

Nejprve se zamysleme nad prováděnou optimalizací. Aby mimozemšťan strávil na cestě co nejméně času, je potřeba, aby letěl celou cestu co nejvyšší rychlostí. Nejvýhodnější tedy bude, když se již na začátku velmi rychle urychlí na nějakou požadovanou rychlost v_1 a nebude tedy ztrácet čas zrychlováním. Objemový tok paliva není omezen, můžeme si tedy představit, že naráz odhodí část svého paliva rychlostí u. Analogicky nebude ztrácet čas bržděním, takže zastaví okamžitě. Podobně po cestě zpět.

K vyřešení úlohy použijeme známou Ciolkovského rovnici ve tvaru

$$v_1 = u \ln \frac{m}{m_1}\,,$$

kde v_1 je rychlost, kterou přeletí vzdálenost ke svému sousedovi, a m_1 je hmotnost, která zbyde jeho raketě po zrychlování.

Aby mohl zastavit u svého kamaráda, potřebuje zpomalit na nulu, takže musí platit

$$v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2}\,,$$

odkud $m_1/m_2 = m/m_1$.

Pro cestu zpět analogicky platí $m_2/m_3 = m_3/m_0$.

Máme dvě rovnice pro tři neznámé, jako zbývající neznámou zvolíme m_2 (hmotnost rakety, se kterou doletí ke svému kamarádovi). Vyjádříme čas cesty k sousedovi v závislosti na m_2 jako

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{L}{u \ln \frac{m_1}{m_2}} = \frac{L}{u \ln \frac{\sqrt{m m_2}}{m_2}} = \frac{2L}{u \ln \frac{m}{m_2}}\,.$$

Podobně

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{u \ln \frac{m_2}{m_3}} = \frac{L}{u \ln \frac{m_2}{\sqrt{m m_2}}} = \frac{2L}{u \ln \frac{m_2}{m_0}}\,.$$

Celkový čas je

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2L}{u}\left(\frac{1}{\ln \frac{m_2}{m_0}} + \frac{1}{\ln \frac{m}{m_2}}\right) = \frac{2L}{u}\left(\frac{\ln \frac{m}{m_0}}{\ln \frac{m_2}{m_0} \ln \frac{m}{m_2}}\right)\,.$$

Teď již jen zderivujeme podle m_2 a výslednou funkci položíme rovnu nule, tedy

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m_2} = -\frac{2L}{u} \ln \frac{m}{m_0} \frac{\left(\frac{1}{m_2} \ln \frac{m}{m_2} - \ln \frac{m_2}{m_0} \frac{1}{m_2}\right)}{\left(\ln \frac{m_2}{m_0} \ln \frac{m}{m_2}\right)^2} = 0\,,$$

odkud

$$m_2 = \sqrt{m m_0}\,.$$

Je zřejmé, že se v tomto bodě jedná o minimum dané funkce, protože kdyby $m_2 \to m$, tak by cesta k sousedovi trvala velmi dlouho, naopak kdyby $m_2 \to m_0$, tak by strávil velmi dlouho na cestě zpět.

Dosazením do derivované funkce dostáváme

$$T_{\min} = \frac{2L}{u} \left(\frac{\ln \frac{m}{m_0}}{\ln \sqrt{\frac{m}{m_0}} \ln \sqrt{\frac{m}{m_0}}} \right) = \frac{8L}{u} \frac{1}{\ln \frac{m}{m_0}} \,,$$

což je námi hledaný výsledek.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.