Úloha V.4 ... Dark Side Time

8 bodů; průměr 6,94; řešilo 53 studentů

FYKOS plánuje vyslat do vesmíru vlastní družici. Ta bude poháněna solárními články, potřebujeme proto, aby se ve stínu Země nenacházela příliš dlouho. V jaké výšce nad povrchem bude doba průletu stínem Země nejmenší? Při svých výpočtech uvažujte (stejně jako organizátoři), že Země je dokonale kulatá, sluneční paprsky jsou v jejím okolí paralelní a Slunce, Země a trajektorie družice se nachází v jedné rovině.

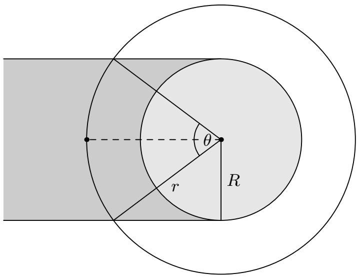
Bonus Během řešení narazíte na analyticky neřešitelnou rovnici. Nepoužívejte online řešiče, ale naprogramujte vlastní řešení.

Honzovi se v Kerbalovi vybily baterky.

Nejprve vypočteme úhlovou rychlost oběhu satelitu ω.

$$F_g = F_d\,,$$
$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}\,,$$
$$G\frac{M}{r^2} = \omega^2 r\,,$$
$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}\,,$$

kde M je hmotnost Země, m hmotnost satelitu, r vzdálenost satelitu od hmotného středu Země. Dále potřebujeme zjistit, jakou část trajektorie stráví satelit ve stínu Země. Spočteme tedy úhlovou velikost θ kruhového oblouku schovaného ve stínu Země.



Obr. 1: Nákres situace. Zde R je poloměr Země.

Z náčrtu situace lze vyčíst, že

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{r}\,,$$
$$\theta = 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\,,$$

kde R je poloměr Země. Čas ve stínu t tedy bude

$$t = \frac{\theta}{\omega}\,,$$
$$t = 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}}\,.$$

Tento čas chceme minimalizovat vhodnou volbou parametru r. Zderivujeme ho tedy podle r a získaný výraz položíme rovný nule.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{\frac{3}{2}}\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\right) = 0\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{r}\right)^2}}\frac{-R}{r^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}} + \arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\frac{3}{2R}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Rovnice, kterou jsme dostali, vypadá velmi nepříjemně. Použijeme tedy první trik – upravíme ji do bezrozměrného tvaru. V tomto případě to bude jednoduché, neboť máme pouze jednu neznámou, jeden parametr a oba mají rozměr délky. Můžeme tedy problém přeformulovat tak, že se zbavíme jednoho parametru a získáme novou rovnici, která je bezrozměrná. Zavedeme tedy normovanou vzdálenost u, dosadíme ji a výraz upravíme.

$$u = \frac{R}{r}\,,$$

$$\frac{3}{2}\arcsin(u) - \frac{1}{\sqrt{u^{-2}-1}} = 0\,.$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky. Použijeme tedy programy Desmos nebo Wolfram Alpha. Získáme výsledek

$$u \doteq 0{,}823\,.$$

Po vrácení substituce dostaneme

$$r \doteq \frac{R}{0{,}823}\,,$$

$$r \doteq 1{,}215R\,.$$

Vzhledem k tomu, že r je poloměr orbity měřen od středu Země, odečteme od obou stran rovnice R. Tím na levé strmě dostaneme výšku nad povrchem h a na druhé straně hodnotu v násobcích R

$$h \doteq 0{,}215R\,.$$

Po dosazení $R \doteq 6\,378\,\mathrm{km}$ dostaneme konečný výsledek

$$h \doteq 1\,370\,\mathrm{km}\,.$$

Zatím víme, že jde o lokální extrém funkce. Chtěli bychom však vědět, že jde o globální minimum. Spočítáme tedy druhou derivaci $t(r)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2}{\sqrt{GMr}}\left(\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{-\frac{r^2}{R^2}+2}{\sqrt{\frac{r}{R}^2-1}^3}\right)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}r^2}(1{,}215R) \doteq \frac{4.207}{\sqrt{GMR}}\,.$$

Vidíme, že je kladná, funkce je tedy konvexní a našli jsme lokální minimum.

Jelikož nemáme žádné další kandidáty na extrém, zbývá nám ještě vyšetřit krajní body definičního oboru funkce. V R nabývá funkce hodnoty $\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, což je očividně vyšší než funkční hodnota v námi nalezeném bodě $2{,}589\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$.

A jelikož $\arcsin(x) \approx x$ pro $x \approx 0$, chová se funkce $t(r)$ v nekonečnu jako

$$t(r) = 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \approx 2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2R\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

a v limitě do nekonečna tedy roste nade všechny meze. Opravdu jsme našli globální minimum. Samozřejmě místo tohoto výpočtu bylo možné si funkci nechat nějakým programem nakreslit.

Bonus

Bezrozměrnou rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{3}{2}\arcsin(u) - \frac{1}{\sqrt{u^{-2}-1}} = 0\,.$$

Máme-li rovnici tvaru

$$f(x) = 0\,,$$

pak lze za jistých předpokladů nalézt její kořeny užitím tzv. Newtonovy metody, která funguje následujícím způsobem.

Nejprve se pokusíme odhadnout hodnotou x_0. Tento odhad budeme dále zpřesňovat použitím rekurentního vzorce

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,,$$

který bude v našem případě po dosazení a úpravě vypadat

$$u_{k+1} = u_k - \frac{\frac{3}{2}\arcsin(u_k) - \frac{1}{\sqrt{u_k^{-2}-1}}}{\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u_k^2}} - \frac{u_k^{-3}}{\sqrt{u_k^{-2}-1}^3}}\,,$$

$$u_{k+1} = \frac{3 - 5u_k^3 - 3\sqrt{1-u_k^2}^3\arcsin(u_k)}{1-3u_k^2}\,.$$

Pokud byl náš počáteční odhad dobrý[1], budou se nové prvky takto získané posloupnosti svojí hodnotou přibližovat hodnotě řešení původní rovnice. Pro počáteční podmínku $u_0 = 0{,}9$ dostaneme posloupnost

Z tabulky 1 vidíme, že už ve 3. iteraci se dostaneme na požadovanou přesnost.

Pár poznámek na závěr

Pokud bychom polevili na našich předpokladech, dostaneme další dvě možná řešení.

Tím prvním by byla heliosynchronní dráha. Nedokonale sférický tvar Země způsobuje pomalé stáčení orbit[2] družic, čehož lze pro naše účely využít. Pokud bude mít oběžná dráha naší

[1] v našem případě musí být počáteční hodnota v intervalu $(0.696, 1)$, jinak Newtonova metoda nebude konvergovat k danému kořenu, ale k 0.

[2] odborně nazývané precese

Tab. 1: Hodnoty výsledku v jednotlivých iteracích.

k	$\frac{u_k}{1}$
0	0,900 0
1	0,829 4
2	0,823 6
3	0,823 4
4	0,823 4

družice ty správné parametry[3], bude mít perioda tohoto stáčení délku jednoho roku. Lze tedy zařídit, aby rovina oběhu družice měla neměnnou orintaci vuči spojnici Země a Slunce. Když zvolíme takovou orbitu, která do stínu při prvním oběhu nezachází, nevstoupí do stínu Země dlouhodobě.

Druhým řešením by bylo dát družici do jednoho z Lagrangeových bodů. Avšak toto řešení je poněkud problematické. První tři nejsou stabilní, přesto jsou (první dva z nich) využívány mnoha družicemi jako družice SOHO pozorující Slunce v bodě L1, či dalekohlad Jamese Webba v bodě L2. Bod L3 je na opačné straně od Slunce než Země, s potenciální družicí v okolí tohoto bodu by bylo obtížné komunikovat. Body L4 a L5 jsou od Země vzdáleny 1 au, takže by družice taktéž nejspíše byla příliš daleko na to, aby mohla plnit svůj účel.

Jan Benda
`honzab@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[3] Zde je důležitý sklon roviny, ve které družice obíhá, vůči rovině rovníku Země. Pro zájemce detaily kupříkladu na `https://en.wikipedia.org/wiki/Sun-synchronous_orbit`.