Úloha V.5 ... xenon šel na vandr

8 bodů; průměr 3,15; řešilo 33 studentů

Jednou kladně ionizovaný atom xenonu vyletěl rychlostí $v = 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ze středu velké válcové cívky a začal se pohybovat homogenním magnetickým polem v rovině kolmé na magnetické siločáry. V tu chvíli cívku odpojíme od zdroje, takže její indukce začne exponenciálně klesat podle vztahu $B(t) = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t}$, kde $B_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ a $\Omega = 600\,\mathrm{s^{-1}}$. S jakou odchylkou od původního směru se atom bude pohybovat po ustálení?

Nápověda: V úloze se nebojte použít vhodnou aproximaci, nebo ji zkuste řešit numericky.

Vojta vymýšlel zadání s rozumným řešením několik hodin, ale stejně je to hnus. A to ještě neviděl řešení.

Nejprve si musíme uvědomit, které síly na atom působí. Samozřejmě je tu magnetická síla způsobená přítomností magnetického pole. To se ale s časem mění, proto zde vzniká i pole elektrické, které na elektron také působí. Z Maxwell-Faradayovy rovnice[1] máme pro kruhovou oblast o poloměru r díky symetrii problému

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2 = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = E 2\pi r \quad \Rightarrow \quad E = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nalezli jsme tak velikost vektoru elektrické intenzity, ale ještě musíme zjistit, kam míří. Předchozí rovnici můžeme vyjádřit také v diferenciálním tvaru

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,.$$

Operátor rotace $\nabla\times$ je vektorový součin operátoru ∇ (což jsou parciální derivace podle jednotlivých souřadnic) s nějakým vektorem jako argumentem (ten je v našem případě intenzita elektrického pole). Například pro komponentu v ose z výsledného vektoru máme $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$.

Orientujme souřadnicový systém tak, že osa z míří ve směru magnetické indukce a je totožná s osou symetrie válce. Osy x a y pak leží v rovině kolmé k této ose. Nechť počátek leží v bodě, odkud vylétá atom a osa x míří do směru jeho rychlosti. Pak má vektor magnetické indukce tvar $\mathbf{B} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t}\,(0,0,1)^\mathsf{T}$. Proto i vektor vzniklý operátorem rotace na elektrickou intenzitu musí mít pouze třetí komponentu. Snadno si můžete ověřit, že vektor elektrické intenzity

$$\mathbf{E} = \frac{B_0\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\Omega t}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

splňuje Maxwellovu rovnici. Přímý výpočet tvaru vektoru není jednoduchý a vektor dokonce není určený jednoznačně, splňuje ale všechny podmínky, které v rámci elektromagnetismu musí. Samozřejmě jeho velikost koresponduje s velikostí určenou první rovnicí. Směr vektoru bychom už z první rovnice mohli také určit pomocí Lenzova pravidla.

Pohybová rovnice pro nabitou části v elektromagnetickém poli je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,.$$

[1] Pro více informací doporučujeme seriál 17. ročníku FYKOSu, který se věnuje elektromagnetismu

V našem případě je částicí kladně nabitý atom o náboji $q = e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ a hmotnosti $m_{\mathrm{Xe}} = m_\mu A_{\mathrm{Xe}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 137{,}3 = 2{,}2 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$. Vektorovou pohybovou rovnici rozepíšeme na tři složky podle každé z os

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(-\frac{\Omega}{2} y + \dot{y} \right) ,\\
\ddot{y} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(\frac{\Omega}{2} x - \dot{x} \right) ,\\
\ddot{z} &= 0 ,
\end{aligned}
$$

kde jsme rozepsali vektorový součin

$$
\mathbf{v} \times \mathbf{B} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Získali jsme pohybové rovnice pro pohyb elektronu v elektromagnetickém poli. Je to soustava tří lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Pohyb v ose z je jednoduše přímočarý a jelikož elektron dle zadání vylétá kolmo k ose symetrie, je jeho rychlost v_z nulová. Souřadnice z elektronu je tedy také nulová po celou dobu jeho pohybu.

Problém je s řešením zbylých dvou rovnic, které jsou spolu provázány. Při obecném řešení bychom mohli použít nějaké triky z lineární algebry a rovnice by se nám podařilo separovat (tj. aby v každé rovnici vystupovala jen jedna souřadnice a její časové derivace). Naštěstí se pro vyřešení této úlohy bez tohoto náročného postupu obejdeme. Nakonec není potřeba ani numerická simulace, ale samozřejmě i ta je validním řešením pro takto náročné analytické formule. Do našeho řešení proto přikládáme také jednoduchý kód v Pythonu.

Jeden trik ale přeci jen použijeme. Kvůli tomu, že se v rovnicích vyskytuje součin Ω a souřadnice, není jasné, jestli lze něco zanedbat, aby se rovnice zjednodušily. Použijeme proto substituci $\Omega t = T$, kde T bude bezrozměrný čas, pro který platí, že v čase $T = 1$ bude intenzita magnetického pole ekrát menší než na začátku. Rovnice pak budou mít tvar

$$
\begin{aligned}
\Omega^2 \frac{1}{\Omega^2} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \Omega \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(-\frac{1}{2} y + \frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}\Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(-\frac{1}{2} y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} \right) ,\\
\Omega^2 \frac{1}{\Omega^2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \Omega \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}\Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(\frac{1}{2} x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} \right) ,
\end{aligned}
$$

Všimněme si bezrozměrného faktoru $\alpha = B_0 e/(m_{\mathrm{Xe}}\Omega) \doteq 0{,}13$, který je docela malý. Zrychlení v ose x je na začátku nulové, protože y i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T}$ můžeme volit jako nulové (to odpovídá tomu, že si souřadnicový systém orientujeme tak, že elektron vylétá ve směru osy x). Pak je zrychlení v ose x úměrné rychlosti a poloze v y, ale přes faktor α. Ty jsou zase přes stejný faktor α úměrné rychlosti a poloze v x. Takže aspoň pro začátek pohybu můžeme odhadnout, že zrychlení v x je potlačené přes faktor α^2 vůči rychlosti a poloze ve stejné ose. S časovým vývojem je navíc exponenciálně rychle potlačeno.

To nás přivádí na myšlenku, jak zjednodušit obě rovnice. Napadlo nás, že zrychlení v ose x je malé, takže můžeme položit rychlost $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} = V_{x0}$ jako konstantní. Tím se rovnice pro zrychlení v ose y podstatně zjednoduší

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}\Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(\frac{V_{x0} T}{2} - V_{x0} \right) .
$$

Integrací pomocí per partes podle T dostaneme rychlost jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} = -\frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}\Omega}\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}\left(T-1\right) + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky, že v čase $T = 0$ je rychlost nulová. Pak tedy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} = -\alpha\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}\left(T-1\right) - \alpha\frac{V_{x0}}{2}\,,$$

kvůli exponenciálnímu tlumení zrychlení se po čase pohyb ustálí na rovnoměrný přímočarý. Jeho směr můžeme určit ze směru vektoru rychlosti. Ten je jednoduše

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{V_y(T=\infty)}{V_x(T=\infty)} = \frac{-\alpha\frac{V_{x0}}{2}}{V_{x0}} = \frac{-Be}{2m_{\mathrm{Xe}}\Omega} \doteq -0{,}067\,.$$

Protože na začátku byl úhel β roven nule, odchýlí se atom od původního směru o $\beta = \mathrm{arctg}(-Be/ /(2m_{\mathrm{Xe}}\Omega)) = -3{,}8\,^\circ$, tedy o skoro čtyři stupně v záporném směru osy y.

Ověřme ještě nyní oprávněnost naší aproximace. Zintegrujme polohu v ose y v závislosti na T

$$y = \alpha\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}T - \alpha\frac{V_{x0}T}{2}\,,$$

Dosazením do rovnice pro $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}T^2}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}T^2} = \frac{\alpha^2V_{x0}}{4}\mathrm{e}^{-T}\left(-3\mathrm{e}^{-T}T + T + 2\mathrm{e}^{-T} - 2\right)\,.$$

Integrováním od nuly do nekonečna dostaneme změnu rychlosti v ose x jako

$$\Delta V_x = \frac{\alpha^2V_{x0}}{4}\left(-\frac{3}{4} + 1 + 1 - 2\right) = -\alpha^2V_{x0}\frac{3}{16}\,.$$

Rychlost v ose x se změní o

$$\frac{\Delta V_x}{V_{x0}} = -\frac{3\alpha^2}{16} \doteq -0{,}34\,\%\,.$$

Je tedy zřejmé, že náš předpoklad o konstantní rychlosti lze považovat za správný a provedená aproximace je možná.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.