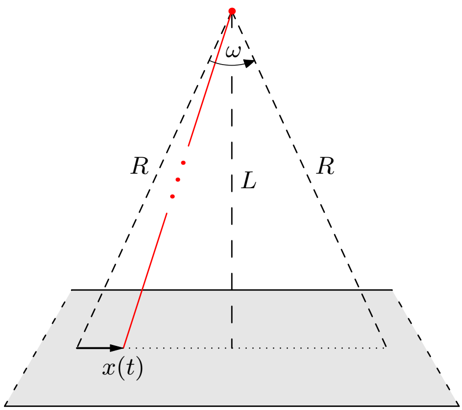
Úloha VI.4 ... světlo rychlejší než světlo
7 bodů; průměr 3,88; řešilo 40 studentů

Ve vzdálenosti L od rozlehlého stínítka se nachází laser. Ten až do času $t = 0\,\mathrm{s}$ svítí na stínítko tak, že vzdálenost skvrny od laseru je $R > L$. Náhle začneme laserem otáčet rovnoměrnou úhlovou rychlostí ω, přičemž vzdálenost skvrny na stínítku od laseru se zmenšuje na L a následně zpět na R. Vyjádřete rychlost této skvrny vzhledem na stínítko. Může překročit rychlost světla ve vakuu c nebo být dokonce nekonečná? Jak (kvalitativně) tato rychlost závisí na poloze skvrny na stínítku? Celá aparatura se nachází ve vakuu.

Marek J. si chcel overiť výroky o zdanlivom prekonaní rýchlosti svetla.

Pri riešení nás budú zaujímať prípady, kedy $L/c \gg 1\mathrm{s}$. Keďže sa zadanie pýta, či rýchlosť svetelného bodu na tienidle môže prekročiť rýchlosť svetla vo vákuu c, pozrieme sa na to, aké hodnoty nadobúda pre $L \to \infty$.Úlohou tohto riešenia je okrem popisu výsledku poskytnúť a použiť niekoľko prístupov k problémom, ktoré vám snáď pomôžu úspešne spočítať aj iné úlohy.



Obr. 1: Nákres situácie. $x(t)$ značí polohu svetelného bodu v čase t.

Geometria myšlienkového experimentu pozostáva z rovnoramenného trojuholníka s počiatkom lúča v jednom vrchole, s dvoma stranami o dĺžke R, pričom tretiu stranu tvorí časť tienidla.

Prvým tipom ako na riešenie úloh, okrem pochopenia a vlastnej reformulácie zadania, je **úlohu si zjednodušiť a vyriešiť ju tak**.

Začiatok experimentu tak ponechajme nezmenený, ale namiesto rovnomerne sa otáčajúceho laseru uvažujme dva lasery: jeden totožný s laserom zo začiatku experimentu a druhý vypnutý, ktorý mieri kolmo na tienidlo – strana L. Experiment začneme tak, že prvý laser vypneme a druhý zapneme.

Keby bolo tienidlo umiestnené blízko laserov, čo zodpovedá každodennému životu, v našom experimente by sme pozorovali okamžité zhasnutie prvého svetelného bodu a súčasné zasvietenie druhého svetelného bodu. Ak však platí $L/c \gg 1\,\mathrm{s}$, tak po vypnutí prvého a zapnutí druhého laseru bude na tienidle stále svietiaci prvý bod, potom sa objaví druhý svetelný bod a až potom zhasne prvý. Deje sa niečo zvláštne, akoby zasvietenie druhého laseru nastalo skôr ako zhasnutie toho prvého. Poďme si dané časy presne spočítať a možno sa nám objasní, čo sa vlastne deje.

Z konečnej rýchlosti svetla vyplýva, že svetlu bude nejaký čas trvať, kým sa dostane k tienidlu, ale rovnako sa informácia o vypnutí prvého laseru nepresunie k tienidlu okamžite (podstata relativity súčastnosti). Dané časy v spomenutom poradí vieme vypočítať ako

$$t_1 = \frac{L}{c}\,,$$
$$t_2 = \frac{R}{c}\,.$$

Keďže platí, že $R > L$ tak $t_2 > t_1$, a teda informácia o zapnutí druhého laseru dorazí na tienidlo skôr ako informácia o vypnutí prvého. Ide o efekt ďalšieho oneskorenia, vznikajúceho odrazom laserov od tienidla k pomyselnému pozorovateľovi pri tienidle ignorujeme, keďže by len zosiľoval pozorované javy.

Vidíme teda, že zo zadania spomínaná nadsvetelná rýchlosť bude mať súvis s meniacou sa dĺžkou laserového lúča. Takisto by sme si daný efekt (v prvom priblížení) mohli predstaviť tak, že rýchlosť svetelného bodu spočítame pomocou uhlovej rýchlosti ω ako $v = l\omega$, kde l je aktuálna dĺžka lúča (teda klasická obvodová rýchlosť) a pri $l \to \infty$ v pôjde takisto do nekonečna. Je to však skutočne tak? Poďme konečne na riešenie problému zo zadania.

Uvedomíme si, že správanie rýchlosti laserového bodu na tienidle je symetrické podľa kolmice vedenej z vrcholu trojuholníka na tienidlo, teda podľa dĺžky L definovanej v zadaní. Tu prichádza druhá rada k riešeniu úloh: **nájdite v úlohe symetriu a skúste ju využiť k zjednodušeniu úlohy**. V tomto prípade stačí na zodpovedanie otázok v zadaní brať do úvahy len jednu polovicu trojuholníka. Uvažujme tak začiatok experimentu v bode dopadu laserového lúča s dĺžkou L a koniec experimentu v bode dopadu laserového lúča s dĺžkou R.

Ďalšou dôležitou voľbou je *výber súradnicového systému*. Väčšinou platí, že by mal vystihovať symetriu úlohy a ušetriť nám počítanie, či už zjednodušením výrazov alebo napríklad tým, že nemusíme stále pripočítavať konštantné členy, a podobne.

V našom prípade nám dobre poslúži súradnica x, ktorá je totožná s polohou na tienidle a $x = 0$ znamená začiatkok experimentu (dopad laserového lúča o dĺžke L). Podobne aj čas t a uhol φ začínajú na nule. Pre uhol však ešte vieme napísať vzťah $\varphi = \omega t$. (**Jasne definovať veličiny spojené s úlohou a uvedomenie si súvislostí medzi nimi** vie rovnako častokrát pomôcť k získaniu riešenia).

Polohu svetelného bodu označujme ako $x(t)$ a použitím Pytagorovej vety dostávame:

$$x(t) = \sqrt{l^2(t) - L^2}\,, \tag{1}$$

kde $l(t)$ je dĺžka trajektórie aktuálne vyslaného laserového fotónu, končiaca na tienidle (premyslite si, že lúč v tomto prípade nemá tvar priamky) a pre ňu platí

$$l(t) = \frac{L}{\cos(\omega t)}\,. \tag{2}$$

Keby sme neuvažovali žiadne oneskorenie informácií o pohybe laseru, tak by sme dosadením vzťahu pre (2) do (1) a následne deriváciou $x(t)$ podľa času dostali závislosť rýchlosti svetelného bodu od času $v(t)$. My však oneskorenie uvažovať potrebujeme. Pre $x(t)$ teda po dosadení za $l(t)$ platí

$$x(t) = L\,\mathrm{tg}(\omega t)\,. \tag{3}$$

Teraz sa pustime do počítania oneskorenia prenosu informácie o pohybe laserového lúča. To závisí od dĺžky lúča pri jeho vyslaní laserom. Čas oneskorenia je daný trajektóriou fotónu a delený rýchosťou svetla. Označme teda čas s daným oneskorením, s ktorým dostáva informácie z počiatku pomyselný pozorovateľ pri tienidle, t':

$$t' = t - \frac{l(t')}{c} = t - \frac{L}{c\cos(\omega t')}\,. \tag{4}$$

Mohla by vznikať otázka, či náhodou do závislosti l nepatrí čas t, k tienidlu sa však dostávajú lúče vyslané z minulosti, teda v čase t na tienidlo dopadá lúč vyslaný v čase t' (oneskorený čas), čiže lúč prechádzajúci dráhu $l(t')$ (dráhy sú totiž určené už pri namierení laseru).

Pre oneskorený čas t' tak dostávame transcendentnú rovnicu, a teda ho nevieme vyjadriť priamo. Dá sa však nájsť pre dané parametre numericky. To nám nevadí, keďže na otázky zo zadania vieme odpovedať aj s rovnicami, kde vystupuje „posunutý“ čas „t'“, keďže to správanie rýchlosti (jej hodnoty, maximum a podobne) nemení.

Fiktívny pozorovateľ pri tienidle uvidí lúče resp. svetelné body na tienidle s oneskorením vyjadreným v (4) a ich polohu môžeme vyjadriť jednoducho dosadením vzťahu pre t' do rovnice pre $x(t)$, dostávame tak

$$x' \equiv x(t') = L \operatorname{tg}\left[\omega\left(t - \frac{L}{c\cos(\omega t')}\right)\right]. \tag{5}$$

Derivovaním vzťahu (5) podľa času t dostaneme našu hľadanú závislosť $v(t)$

$$v(t'(t)) = \frac{\omega L c}{c\cos^2(\omega t') + \omega L \sin(\omega t')}\,, \tag{6}$$

kde sme štandardne derivovali, využili definičné vzťahy uvedené vyššie, či vlastnosti goniometrickej funkcie tangens. Z rovnice (4) sme dopočítali

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{c\cos(\omega t')}{c\cos(\omega t') + \omega L \operatorname{tg}(\omega t')}\,.$$

Vzťah (6) popisuje rýchlosť svetelného bodu vzhľadom na tienidlo pre časy $t' \geq 0$ (keďže predtým je svetelný bod nehybný).

Teraz môžeme odpovedať na všetky zvyšné otázky v zadaní.

Pre uhol φ uvažujeme kladné hodnoty menšie ako pravý uhol, teda nám žiadne problémy v skúmaní správania pre $L \to \infty$ výrazy s ním spôsobovať nebudú, pretože sú nenulové a konečné. V našej ďalšej diskusii ich teda môžeme ignorovať.

Uhlová rýchlosť ω a rýchlosť svetla c sú na tom podobne. Vidíme, že čitateľ výrazu (6) obsahuje L rádovo rovné menovateľu, a teda pre $L \to \infty$ je rýchlosť „modulovaná“ sínusom v menovateli a v určitých úsekoch tienidla sa blíži k nekonečnu. Samozrejme sa nerozprávame o skutočnom nekonečne, vtedy by sa laser nikdy k tienidlu ani nedostal, podstatou je, že dostaneme ľubovoľne veľkú rýchlosť.

Zostáva už len kvalitatívny popis vývoja rýchlosti svetelného bodu na tienidle v myšlienkovom experimente zo zadania. Vidíme, že zo začiatku bude svetelný bod zotrvávať na tienidle v polohe zodpovedajúcej lúču R (začiatok experimentu), potom, keď informácia o pohybe lasera docestuje k tienidlu, sa bod začne hýbať smerom k stredu svojej dráhy, určenému lúčom s dĺžkou L, pričom sa daná rýchlosť na ceste k stredu zvyšuje ($l(t)$ sa zkracuje). V okolí stredu dosiahne svoje maximum, a potom bude spomaľovať až ku druhému bodu určenému druhým lúčom s dĺžkou R.

Otázka na záver pre čitateľa: prečo to neodporuje špeciálnej teórii relativity?

Marek Jankola
`marekj@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.