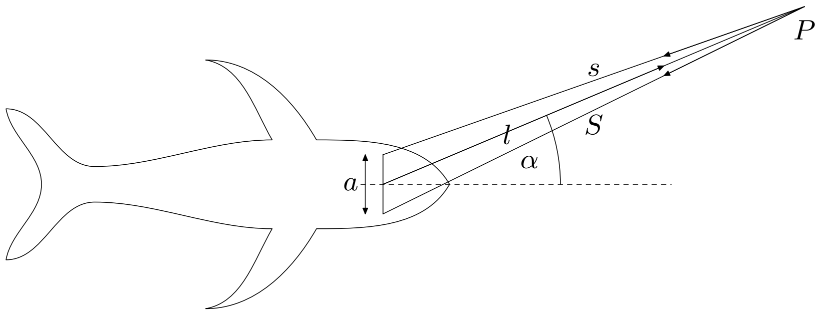
Úloha I.1 ... Moby Dick

3 body; průměr 1,66; řešilo 119 studentů

Některé druhy živočichů, jako jsou kytovci, se orientují pomocí echolokace. Předpokládejme, že kytovec vydává zvukový signál hrtanem umístěným přesně mezi ušima vzdálenýma a. Uvažujme, že ve stejné hloubce jako velryba pluje ponorka. Vydaný zvuk se od ní odrazí a k bližšímu uchu dorazí za čas t od okamžiku vyslání. Je-li časový posun mezi zachycením zvuku pravým a levým uchem Δt, jaká je vzdálenost a směr k ponorce?

Výprava velrybářská se Radce poněkud vymkla z rukou.

Nejprve si načrtneme obrázek 1 dané situace. Jelikož předpokládáme, že ponorka i velryba se nacházejí ve stejné hloubce, můžeme uvažovat pouze ve dvou rozměrech. Vzdálenost mezi ušima velryby značíme a, vzdálenost ponorky a k ní bližšího ucha označme jako s. Vzdálenost k ponorce l, kterou počítáme, zadefinujeme jako vzdálenost ponorky od velrybího hrtanu. Dále definujeme ostrý úhel α, který svírá osa velryby a spojnice ponorky s velrybím hrtanem, viz obrázek.



Obr. 1: Náčrt situace. Písmeno P označuje polohu ponorky. Šipky naznačují směr šíření zvuku.

Označme rychlost šíření zvuku ve vodě jako v. Pro celkový čas šíření signálu t tak můžeme psát

$$l + s = vt\,.$$

Pro rozdíl drah mezi pravým a levým uchem Δ můžeme psát obdobně

$$\Delta = v\Delta t\,.$$

Povšimněme si, že z trojúhelníkové nerovnosti plyne $v\Delta t \leq a$. Vzdálenost ponorky ke vzdálenějšímu uchu potom vyjádříme jako

$$S = s + \Delta\,.$$

Nyní můžeme napsat kosinovou větu pro trojúhelník hrtan-bližší ucho-ponorka

$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2 - 2\frac{a}{2}l\cos(90^\circ - \alpha)\,.$$

Po úpravě

$$s^2 = \frac{a^2}{4} + l^2 - al\sin(\alpha)\,.$$

Kosinovou větu lze psát také pro druhý trojúhelník: hrtan-vzdálenější ucho-ponorka

$$S^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2 - 2\frac{a}{2} l \cos(90^\circ + \alpha)\,,$$

což upravíme na

$$s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = \frac{a^2}{4} + l^2 + al\sin(\alpha)\,.$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$2s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = 2\frac{a^2}{4} + 2l^2$$

a dosazením za s a Δ pomocí t a Δt potom

$$2v^2t^2 + 2l^2 - 4vtl + 2(vt - l)v\ \Delta t + v^2(\Delta t)^2 = \frac{a^2}{2} + 2l^2\,.$$

Můžeme si všimnout, že kvadratické členy v l se odečtou a ze vzniklé lineární rovnice snadno vyjádříme vzdálenost ponorky l jako

$$l = \frac{v^2t^2 - \frac{a^2}{4} + vtv\Delta t + \frac{v^2(\Delta t)^2}{2}}{2vt + v\Delta t}\,,$$

neboli (vytkneme $vt/2$)

$$l = \frac{vt}{2}\frac{1 - \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{(\Delta t)^2}{2t^2}}{1 + \frac{\Delta t}{2t}}\,.$$

Odečtením dvou kosinových vět naopak získáme rovnici

$$2al\sin\alpha = 2s\Delta + \Delta^2 = 2(vt - l)v\Delta t + v^2\Delta t^2\,,$$

odkud snadno vyjádříme

$$\sin\alpha = \frac{2(vt - l)v\Delta t + v^2\Delta t^2}{2al} = \frac{v\Delta t}{a}\frac{vt - l + \frac{v\Delta t}{2}}{l} = \frac{v\Delta t}{a}\left[\frac{vt}{l}\left(1 + \frac{\Delta t}{2t}\right) - 1\right].$$

Po dosazení za l a přímočarých algebraických úpravách získáme konečný výraz

$$\sin\alpha = \frac{v\Delta t}{a}\frac{1 + \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t}}{1 - \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{(\Delta t)^2}{2t^2}}\,.$$

Obzvlášť zajímavé je zkoumat limitní případ, kdy

$$\frac{a}{vt} = \frac{a}{s + l} \ll 1\,,$$

neboli, kdy vzdálenost ponorky je výrazně větší než šířka velryby (jak bychom ostatně typicky čekali). To zároveň (skrze trojúhelníkovou nerovnost) implikuje

$$\frac{\Delta t}{t} \leq \frac{a}{vt} \ll 1\,,$$

neboli, že zpoždění signálu Δt je zanedbatelné oproti celkové době šíření signálu t. Při pohledu na výsledky pro l a α v této limitě dostáváme jednoduché výrazy

$$l \approx s = \frac{vt}{2}$$

a

$$\sin \alpha \approx \frac{v\Delta t}{a}\,.$$

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.