Úloha I.P ... raketová

10 bodů; průměr 3,24; řešilo 74 studentů

Kolik paliva potřebujeme k vynesení předmětu o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$ *na nízkou oběžnou dráhu za použití současných technologií?* *Skřítek chtěl ušetřit na raketovém palivu.*

Úvod

Evropská kosmická agentura (ESA) udává jako nízkou oběžnou dráhu (LEO – z anglického Low Earth Orbit) rozpětí 160 km – 1 000 km (jiné zdroje uvádí až 2000 km odpovídající oběžné době do 128 min). Pro účely této úlohy se tedy budeme zabývat pouze takovými metodami přepravy nákladu, které již v minulosti prokazatelně na tuto oběžnou dráhu libovolně velký předmět přepravily. Tímto požadavkem jsme omezili nabídku dopravních prostředků pouze na několik typů raket, protože jiné metody zatím nebyly uvedeny do praxe).
Budeme předpokládat, že náš předmět o hmotnosti $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{kg}$ je jediným předmětem, který potřebujeme vynést, takže hledáme raketu s nosností alespoň 1 kg, aby zároveň byla co nejlehčí. Těmto podmínkám nejlépe vyhovuje japonská raketa SS-520.

Oběžná dráha

Našim úkolem je tedy vynést raketu s předmětem na oběžnou dráhu, za kterou zvolíme kružnici ve výšce $h = 160\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. Pokud bychom chtěli, aby se předmět na oběžné dráze udržel bez korekcí alespoň po dobu trvání běžných misí cubesatů, které hmotností odpovídají našemu předmětu (tedy týdny až jednotky měsíců), museli bychom předmět umístit výše kvůli odporu atmosféry (cubesaty se běžně vypouštějí ve výškách od 400 km nad povrchem). V této úloze ale hledáme nejmenší odhad na množství paliva, a proto nám stačí výška $h = 160\,\mathrm{km}$. Požadovanou oběžnou rychlost pro tento případ vypočteme pomocí vzorce pro 1. kosmickou (kruhovou) rychlost

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost země a r je poloměr oběžné dráhy předmětu, v tomto případě $r = r_\mathrm{Z} + h = 6\,538\,\mathrm{km}$, kde $r_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ je střední poloměr Země. Dostáváme rychlost $v_\mathrm{k} = 7{,}81\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Raketa ovšem vylétá ze Země, která sama také rotuje, takže vyšleme-li raketu směrem shodným s rotací Země, stačí jí dodat rychlost rovnou rozdílu kruhové rychlosti a rychlosti rotace Země v místě startu rakety. Aby byla počáteční rychlost co nejvyšší, hledáme kosmodrom co nejblíže rovníku.

Ideálním kandidátem je například kosmodrom Kourou ve Francouzské Guyaně nacházející se na $5^\circ 3'$ s. š. Objekt na Zemi na této zeměpisné šířce se pohybuje po kružnici o poloměru $R_\mathrm{o} = R_\mathrm{Z} \cdot \cos\varphi \doteq 6\,353\,\mathrm{km}$ s periodou $T = 1\,\mathrm{den} = 86\,400\,\mathrm{s}$. Vlivem rotace Země má proto raketa při startu rychlost $v_\mathrm{Z} \doteq 0{,}46\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Raketě tedy stačí dodat (v tečném směru k Zemi) rychlost $v_\mathrm{t} = v_\mathrm{k} - v_\mathrm{Z} = 7{,}35\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Gravitační působení a odpor vzduchu

Velikost gravitační síly v závislosti na výšce h a hmotnosti rakety m je

$$F_\mathrm{G} = \frac{GMm}{(r_\mathrm{Z} + h)^2}\,.$$

Velikost tíhového zrychlení ve výšce $h = 160\,\mathrm{km}$ je $a \doteq 9{,}32\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Při průletu rakety atmosférou na ni působí odporová síla, kterou aproximujeme vztahem

$$F_\mathrm{O} = \frac{1}{2} C_\mathrm{r} S \rho v^2\,,$$

kde C_r je součinitel odporu popisující tvar rakety, S je plocha rakety vystavená odporové síle (v tomto případě její průřez), ρ je hustota atmosféry a v rychlost pohybu rakety. Uvažujme $C_\mathrm{r} = 0{,}3$ (koeficient odpovídající tvaru nábojnice) a kruhový průřez rakety o průměru $d = 0{,}52\,\mathrm{m}$, takže pro plochu tedy platí $S = \pi d^2/4 \doteq 0{,}21\,\mathrm{m^2}$.

Hustota atmosféry se dá aproximovat exponenciální závislostí[1]

$$\rho \approx \rho_0 \mathrm{e}^{\frac{h}{H_n}}\,,$$

kde ρ_0 je hustota standardní atmosféry, h výška nad povrchem a H_n je konstanta definovaná jako

$$H_n = \left(\frac{gM}{RT_0} - \frac{L}{T_0}\right)^{-1}\,,$$

kde g je tíhové zrychlení u povrchu Země, M je molární hmotnost atmosféry, R molární plynová konstanta, T_0 teplota standardní atmosféry na úrovni mořské hladiny a L rychlost teplotního poklesu atmosféry, přičemž pro ni platí $H_n \doteq 10{,}4\,\mathrm{km}$.

Vlastnosti rakety

Raketa SS-520 se skládá ze dvou, případně ze tří stupňů. Model SS-520-5, který zatím jako jediný z této řady vypustil předmět na LEO, využívá trojstupňovou konstrukci. Vzhledem k tomu, že se 3. stupeň využívá pouze pro drobné korekce dráhy, budeme v tomto příkladu uvažovat využití pouze prvních dvou stupňů. Hmotnost celé rakety (bez nákladu a paliva) je přibližně $m_\mathrm{r} = 580\,\mathrm{kg}$ (často udávaná hmotnost $m_\mathrm{c} = 2\,579\,\mathrm{kg}$ je plně naložená raketa, včetně paliva), přičemž její první stupeň váží přibližně $m_\mathrm{I} = 540\,\mathrm{kg}$, druhý a třetí stupeň dohromady $m_\mathrm{II} = 40\,\mathrm{kg}$.[2] První i druhý stupeň používají motor na tuhé palivo poskytující tahovou sílu $F_\mathrm{m} = 185\,\mathrm{kN}$, se specifickým impulsem $I_\mathrm{sp} = 265\,\mathrm{s}$.[3] Na základě těchto veličin jsme schopni spočítat výtokovou rychlost zplodin vůči raketě

$$u = I_\mathrm{sp} g \doteq 2\,600\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

a hmotnostní průtok paliva pomocí vztahu

$$Q_\mathrm{m} = \dot{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{I_\mathrm{sp} g}\,.$$

Získáváme $Q_\mathrm{m} \doteq 71{,}2\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$.

[1] Density of air, dostupné na webu `https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air`

[2] World's Smallest Launch Vehicle Ready for Second Attempt at Reaching Orbit, dostupné na webu `https://spaceflight101.com/ss-520-5-launch-preview/`

[3] SS-520 Nano satellite launcher and its flight result, dostupné na webu `https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4120&context=smallsat`

Model letu

Let rakety si pro zjednodušení rozdělíme na dvě části. Jednou z nich je let celé rakety (včetně prvního stupně) svisle vzhůru ze Země. Ve druhé části dojde k oddělení prvního stupně a raketě bude dodána potřebná oběžná rychlost, jedná se tedy o let v tečném směru.

Raketa během svého letu mění kromě rychlosti taktéž svou hmotnost, protože dochází k vypouštění paliva. Nejdříve budeme počítat množství paliva potřebného pro dodání kruhové rychlosti pomocí druhého stupně rakety. K tomu můžeme využít Ciolkovského rovnice, jelikož v tečném směru od Země ve výšce oběžné dráhy na těleso nepůsobí žádné vnější síly.

K výpočtu množství paliva potřebného pro první část letu (let vzhůru) již Ciolkovského rovnice použít nemůžeme, protože na raketu během letu působí (nekonstantní) vnější síly, vyjdeme tedy z obecnější Meščerského rovnice pro pohyb rakety.

Dodání kruhové rychlosti

Hmotnost na počátku manévru označme $m_{\mathrm{start}} = m_{\mathrm{II}} + m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{palivo},2}$, pro hmotnost na konci letu platí $m_{\mathrm{konec}} = m_{\mathrm{II}} + m_{\mathrm{p}} = 41\,\mathrm{kg}$. Během manévru musí raketa změnit svou rychlost v tečném směru o $\Delta v = v_{\mathrm{t}} = 7{,}35\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, Ciolkovského rovnice má tvar

$$m_{\mathrm{start}} = m_{\mathrm{konec}} \mathrm{e}^{\Delta v/u}\,,$$

kde u je výtoková rychlost zplodin. Dosazením známých hodnot dostaneme počáteční hmotnost této fáze letu $m_{\mathrm{start}} \doteq 693\,\mathrm{kg}$ a tedy hmotnost paliva ve druhém stupni rakety $m_{\mathrm{palivo},2} = 652\,\mathrm{kg}$.

Pohybová rovnice

Pro model pohybu rakety svisle vzhůru vyjdeme z Meščerského rovnice pro pohyb rakety

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{x}} + \dot{m}\mathbf{u} = \mathbf{F}\,,$$

kde $\dot{m}$ je hmotnostní průtok paliva, $\mathbf{u}$ rychlost výtoku spalin vzhledem k raketě, $\mathbf{p}$ hybnost rakety, m okamžitá hmotnost rakety a $\mathbf{F}$ je výslednice vnějších sil působících na raketu (gravitační a odporová). Dosazením jednotlivých sil působících na raketu dostaneme

$$m\ddot{x} = \dot{m}u - \frac{GMm}{(r_{\mathrm{Z}} + x)^2} - \frac{1}{2} C_{\mathrm{r}} S \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{H_n}} v^2\,,$$

po dosazení $v = \dot{x}$ a vydělení celé rovnice m dostáváme

$$a = \ddot{x} = \frac{\dot{m}}{m} u - \frac{GM}{(r_{\mathrm{Z}} + x)^2} - \frac{1}{2m} C_{\mathrm{r}} S \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{H_n}} \dot{x}^2\,.$$

Tato rovnice nemá analytické řešení, můžeme se ovšem pokusit rovnici řešit numericky pomocí počítačové simulace.

Simulace první fáze letu

K výpočtu upravené pohybové rovnice využijeme Eulerovy metody řešení obecných diferenciálních rovnic. Budeme po vhodně malých úsecích zvyšovat čas (v našem případě například $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$) a sledovat, jak se za tuto chvíli změní poloha a rychlost rakety. Dostáváme tedy rovnici pro polohu (výšku nad povrchem) rakety

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t v_t\,,$$

kde x_t a v_t je poloha, respektive rychlost rakety v čase t a $x_{t+\Delta t}$ je poloha rakety o čas Δt později.

Druhá rovnice je pro rychlost

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = v_{t+\Delta t} = v_t + \Delta t a_t \,,$$

kde a_t je zrychlení rakety v čase t. Dosazením za zrychlení z pohybové rovnice dostáváme rovnici

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = v_{t+\Delta t} = v_t + \Delta t \left(\frac{\dot{m}}{m} u - \frac{GM}{(r_\mathrm{Z} + x_t)^2} - \frac{1}{2m} C_\mathrm{r} S \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{x_t}{H_n}} \dot{x}_t{}^2 \right) .$$

Jako počáteční podmínky volíme $t = 0\,\mathrm{s}$, $x = 0\,\mathrm{m}$ (odpovídající povrchu Země) a $\dot{x} = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (raketa má na počátku nulovou rychlost). Na konci první fáze letu musí být zbylá hmotnost rakety $m_0 = m_I + m_\mathrm{II} + m_\mathrm{p} + m_\mathrm{palivo,2} = 1233\,\mathrm{kg}$.

Jelikož neznáme celkovou počáteční hmotnost rakety odpovídající $m = m_0 + m_\mathrm{palivo,1}$, kde $m_\mathrm{palivo,1}$ je hmotnost paliva v prvním stupni rakety, budeme simulaci provádět postupně pro různá množství paliva. Jako dolní odhad volíme jednoduše $m_\mathrm{palivo,1} = 0\,\mathrm{kg}$, horní odhad zvolíme tak, aby raketa byla schopná za počátečních podmínek vzlétnout od povrchu, tedy aby pro zrychlení platilo $\ddot{x} \geq 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Dosazením počátečních podmínek do pohybové rovnice dostáváme pro horní odhad hmotnosti

$$m_{palivo,1} \leq \frac{r_\mathrm{Z}^2 F_\mathrm{m}}{GM} - m_0 \doteq 17\,660\,\mathrm{kg}\,.$$

V tomto intervalu tedy simulaci provedeme pro každé celé jednotky kilogramu do doby, dokud raketa nevyletí do požadované výšky (v tu chvíli je nalezena nejmenší možná hmotnost). Ukázka použitého kódu (v Pythonu) je v přiloženém souboru.[4]

Výsledek

Na základě simulace vyšla hmotnost paliva prvního stupně jako $m_\mathrm{palivo,1} = 1\,275\,\mathrm{kg}$. Celkové množství paliva potřebné k vynesení daného předmětu je tedy $m_\mathrm{palivo,1} + m_\mathrm{palivo,2} \doteq 1\,927\,\mathrm{kg}$. Hmotnost celé rakety s nákladem i palivem vyšla $m = 2\,508\,\mathrm{kg}$. Skutečná celková hmotnost rakety SS-520-5 (při letu dne 3. 2. 2018) byla $m_\mathrm{c} = 2\,579\,\mathrm{kg}$, což se relativně shoduje s vypočtenou hodnotou.

Radomír Mielec
radomir.mielec@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[4] https://drive.google.com/file/d/1SbvIW9X-0cKGT39NKBjj--fl8F7HONBj/view