

Úloha II.E ... světlo na konci tunelu

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte intenzitu osvětlení pro světlo, které necháte procházet skrze kolový nápoj, v závislosti na tloušťce nápoje. Pomocí fitování naměřených dat určete koeficient absorpce.

Jardovi do plechovky vlétla vos.

V řešení se nejdříve seznámíme s teorií k experimentu, podrobně si představíme uspořádání, pomocí kterého budeme měřit, budeme prezentovat získané výsledky, diskutovat je a nakonec z nich vyvodíme co nejpřesnější závěry.

Naším měřicím přístrojem bude senzor osvětlení na mobilním telefonu, který bude umístěn nad nádobou s kolovým nápojem. Nádobu má průhledné dno a pod ním je umístěn druhý telefon se svítilnou, která je namířena směrem nahoru na senzor osvětlení. Nápoj budeme postupně dolévat a zaznamenávat osvětlení. Pro porovnání použijeme Kofolu a Coca-Colu.

Teorie

Senzor na mobilním telefonu zaznamenává údaj o osvětlení v jednotce *lux*. V rámci teoretické části si proto tuto jednotku stručně představíme a poté nastíníme, jak by osvětlení mohlo záviset na množství nápoje v nádobě.

Lux je jednotkou veličiny E_v , která se nazývá *intenzita osvětlení*. Tato fotometrická veličina je definována jako podíl *světelného toku* Φ_v ku ploše, kterou tento tok prochází. Intenzita osvětlení tak má hodnotu v každém bodě prostoru. V našem případě, kdy je plocha detektoru malá v porovnání s ostatními rozměry experimentu, takže na ní můžeme předpokládat konstantní intenzitu osvětlení, jsou hodnoty světelného toku a intenzity osvětlení úměrné jen přes plochu detektoru.

Dále zmíníme fotometrickou veličinu *svítivost*. To je vlastnost zdroje světla a je definována jako světelný tok, který zdroj vyzáří do malého prostorového úhlu. V případě svítilny na mobilním telefonu je evidentní, že největší svítivost je kolmo na plochu zadní strany mobilu, proto senzor na druhém telefonu umístíme v experimentu nad svítilnu spodního mobilu. Svítivost je pro nás důležitá kvůli tomu, že její jednotkou je *kandela*, jedna ze sedmi základních jednotek SI.

Všechny tři veličiny patří do skupiny fotometrických, vztahují se tedy pouze k oboru viditelného světla. Jejich hodnoty tak neovlivňuje to, jaké množství světla je vyzářeno nebo absorbováno např. v oboru infračerveného nebo ultrafialového záření.

Jak ovšem údaj ze senzoru intenzity osvětlení závisí na tloušťce nápoje v nádobě? Přejdeme na chvíli k popisu množství dopadajícího světla pomocí výkonu a energie. Intenzita záření I (neplést s intenzitou osvětlení E_v), neboli výkon dopadající na jednotku plochy, se vlivem absorpce v nápoji zmenšuje. Za předpokladu, že ztráta intenzity je úměrná její velikosti přes absorpční koeficient α

$$\frac{dI}{dx} = -\alpha I,$$

můžeme odvodit exponenciální závislost klesání intenzity I v materiálu jako

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x},$$

přičemž I_0 je intenzita při dopadu záření na materiál (v našem případě nápoj) a x je vzdálenost od okraje materiálu. Dále budeme uvažovat, že ve vzduchu (tedy mimo nápoj) je absorpce nulová. Potom můžeme psát, že tloušťka nápoje d sníží intenzitu světla při průchodu na

$$I = I_0 e^{-\alpha d}.$$

Obecně je absorpční koeficient α funkcí vlnové délky světla $\alpha(\lambda)$. Platí to i v našem případě, když se bílé světlo, které produkuje svítlna na mobilu, po průchodu nápojem změní na oranžové. Složky záření s modřejšími vlnovými délkami tak jsou pohlcené více.

V našem případě však tento jev při odvození zanedbáme a budeme se zabývat pouze tím, jak moc klesne celková intenzita viditelného světla. Ukázaný exponenciální vztah je jednou z možných formulací Lambertova-Beerova zákona, který se často využívá k analýze chemických vzorků pomocí jejich optických vlastností.

Světelná účinnost je poslední fotometrickou veličinou, kterou zde zmíníme. Převádí výkon (intenzitu) záření na světelný tok (intenzitu osvětlení). Závísí na vlnové délce a zohledňuje tak citlivost lidského oka na různé části světelného spektra. Za výše zmíněného zjednodušeního předpokladu, že kolový nápoj pohlcuje všechny složky viditelného světla stejně (tedy že na daném intervalu $\alpha \neq \alpha(\lambda)$), můžeme uvažovat mezi výkonem a světelným tokem přímou úměru. Proto i intenzita osvětlení v našem modelu bude klesat exponenciálně s rostoucí tloušťkou nápoje v nádobě.

Očekáváme tedy exponenciální závislost ve tvaru

$$E_v(d) = E_{v0}e^{-\alpha d} + E_s$$

a hledáme parametr α . Parametr E_s jsme přidali kvůli tomu, že měření neprobíhalo v úplně temné místnosti, takže zde není nulové vnější osvětlení. Hodnota E_{v0} je přímé osvětlení senzoru od druhého mobilu.

Připomeňme, že naměříme-li vzorek n hodnot $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ náhodné veličiny x , můžeme spočítat jeho výběrový průměr \bar{x} jako jejich součet vydělený jejich počtem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}. \quad (1)$$

Protože je tento průměr také vlastně náhodná veličina (pokaždé naměříme jinou n -tici hodnot), je možné určit jeho chybu jako

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (2)$$

Statistika nám říká, že nejlepší odhad skutečné hodnoty veličiny x_{exp} z námi naměřených hodnot je potom

$$x_{\text{exp}} = (\bar{x} \pm s_{\bar{x}}) j,$$

kde j značí obecně jednotku x .

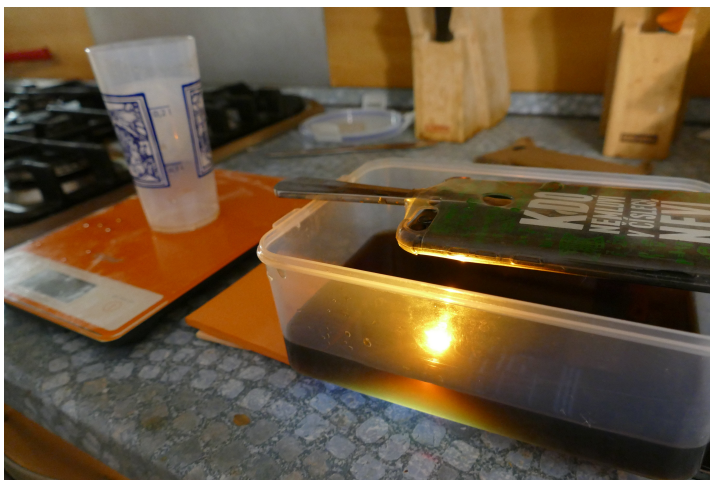
Uspořádání a provádění experimentu

Jak už bylo zmíněno výše, experiment provedeme v „dvoumobilovém sendvičovém uspořádání“. Jako zdroj jsme vybrali svítlnu na mobilním telefonu, protože je to stálý zdroj bílého světla, který je ale hlavně plochý a lze na něj postavit nádobu, do které budeme nalévat kolový nápoj. Nádoba je průhledná plastová krabička bez víčka. Nad nádobu umístíme druhý mobilní telefon se senzorem osvětlení tak, aby byl detektor co nejlépe přímo nad zdrojem světla, abychom už od začátku zaznamenávali co největší signál. Horní mobil upevníme pomocí jeho obalu a pevných tyčí (v našem případě kuchyňských nožů) k horním okrajům nádoby. Ve volně dostupné aplikaci *phyphox* spustíme v režimu *Světlo* měření, při kterém je několikrát za sekundu zaznamenána intenzita osvětlení v senzoru v jednotce lux.

Zaznamenáme intenzitu osvětlení při prázdné nádobě, což by měla být hodnota $E_{v0} + E_s$ z teorie. Následně nalijeme určité množství nápoje a počkáme, až se hladina ustálí a telefon zaznamená dostatečné množství dat, abychom z nich mohli příslušnou hodnotu intenzity osvětlení vyčíst.

K co nejpřesnějšímu určení množství přilévajícího nápoje jsme použili digitální kuchyňskou váhu s přesností 1 g, na které jsme vždy odvážili 30 g nápoje. Celkové množství nápoje v krabici bylo na konci experimentu přibližně 400 g. Jako nápoj jsme použili Kofolu a Coca-Colu.

K nalezení výšky hladiny v krabici jsme potřebovali její rozměry a objem, který zaujímá oněch 30 g. Rozměry budou uvedeny v části *Výsledky*. V téže kapitole budou uvedeny výsledky z měření hustoty, kterou jsme měřili pomocí odměrného válce. Ten jsme se kvůli jeho nízkému rozlišení stupnice rozhodli nepoužít přímo na odměření vždy stejného objemu nápoje při přilévání do krabičky.



Obr. 1: Fotografie experimentální aparatury. Vlevo kuchyňská váha pro odečet zvoleného množství nápoje.

Výsledky

V této části řešení představíme naměřená data a provedeme nezbytné kroky k zodpovězení zadání úlohy.

Kvůli potlačení statistické nejistoty bylo měření intenzity osvětlení v závislosti na výšce nápoje v nádobě provedeno pro každou kapalinu třikrát. Protože mobil zaznamenával údaj o intenzitě osvětlení několikrát za sekundu, jsou hodnoty této veličiny, uváděné dále, průměrem přes několik sekund, kdy došlo k ustálenému stavu a zaznamenávaná hodnota se měnila jen v řádu jednotek lux. Pořadí jednotlivých měření bude označeno číslovkou za názvem dané tekutiny. Data jsou zobrazena v tabulce 1.

Dále představíme naměřené rozměry krabičky v tabulce 2. Její rozměr kolmý na základnu (tedy výška okrajů) je asi 7 cm, při dalších výpočtech ale nehraje roli, proto jej není potřeba určovat přesněji.

Tab. 1: Závislost intenzity osvětlení na množství nápoje v krabičce.

| hmotnost | Kofola 1 | Kofola 2 | Kofola 3 | Coca-Cola 1 | Coca-Cola 2 | Coca-Cola 3 |
|---------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\frac{m}{g}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ | $\frac{E_v}{\text{lux}}$ |
| 30 | 9 209 | 9 068 | 9 627 | 9 735 | 9 890 | 1 0057 |
| 60 | 7 354 | 7 213 | 7 660 | 7 612 | 8 194 | 8 185 |
| 90 | 5 860 | 5 901 | 6 243 | 5 785 | 6 789 | 6 912 |
| 120 | 4 729 | 4 751 | 4 952 | 5 007 | 5 513 | 5 728 |
| 150 | 3 820 | 3 856 | 4 003 | 4 290 | 4 524 | 4 811 |
| 180 | 3 089 | 3 156 | 3 242 | 3 576 | 3 770 | 4 053 |
| 210 | 2 524 | 2 606 | 2 651 | 2 854 | 3 283 | 3 403 |
| 240 | 2 056 | 2 141 | 2 165 | 2 566 | 2 777 | 2 876 |
| 270 | 1 715 | 1 782 | 1 780 | 2 157 | 2 340 | 2 451 |
| 300 | 1 387 | 1 490 | 1 476 | 1 817 | 1 963 | 2 089 |
| 330 | 1 117 | 1 246 | 1 223 | 1 354 | 1 661 | 1 761 |
| 360 | 880 | 1 049 | 1 018 | 1 145 | 1 434 | 1 539 |
| 390 | 667 | 884 | 853 | 971 | 1 227 | 1 322 |
| 420 | 488 | 752 | 721 | | | |
| 450 | 378 | 647 | 611 | | | |

Tab. 2: Rozměry a a b krabičky. Na předposledním řádku průměr a na posledním chyba měření

| měření | $\frac{a}{\text{cm}}$ | $\frac{b}{\text{cm}}$ |
|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 17,9 | 12,9 |
| 2 | 18,0 | 13,0 |
| 3 | 17,9 | 13,0 |
| 4 | 18,0 | 13,0 |
| 5 | 17,9 | 12,9 |
| průměr | 17,9 | 13,0 |
| chyba | 0,1 | 0,1 |

Celková plocha krabičky je $S = ab = (233 \pm 2) \text{ cm}^2$, kde jsme chybu plochy ΔS určili podle zákona přenosu chyb jako

$$\Delta S = S \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2},$$

kde Δa , resp. Δb jsou chyby veličin a a b .

Poslední naměřené hodnoty, které je potřeba uvést, jsou hmotnosti nápojů v závislosti na jejich objemu v tabulce 3. Pro měření hustoty jsme totiž zvolili kuchyňskou odměrku, do které jsme postupně podle rysek dolévali a měřili hmotnost nápoje.

Tab. 3: Závislost hmotnosti nápoje na jeho objemu v odměrce.

| hmotnost | Kofola 1 | Kofola 2 | Kofola 3 | Coca-Cola 1 | Coca-Cola 2 | Coca-Cola 3 |
|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\frac{V}{\text{cm}^3}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ | $\frac{m}{\text{g}}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 45 | 44 | 48 | 48 | 44 | 45 |
| 75 | 72 | 71 | 73 | 70 | 72 | 72 |
| 100 | 98 | 98 | 96 | 94 | 95 | 95 |
| 125 | 122 | 120 | 123 | 123 | 121 | 118 |
| 150 | 150 | 149 | 151 | 147 | 145 | 149 |
| 175 | 177 | 175 | 177 | 173 | 173 | 174 |
| 200 | 202 | 203 | 203 | 199 | 200 | 201 |
| 225 | 226 | 226 | 226 | 225 | 224 | 224 |
| 250 | 253 | 254 | 252 | 251 | 252 | 252 |
| 275 | 280 | 281 | 279 | 276 | 275 | 278 |
| 300 | 308 | 305 | 306 | 304 | 303 | 303 |

Naměřená data pro každou jednu sérii proložíme přímkou ve tvaru $m = \rho V$, kde ρ je parametr reprezentující hustotu. Proložení dat takovou funkcí v programu *Python* nám přineslo hustoty kapalin v tabulce 4. Výslednou hustotu určíme jako průměr jednotlivých měření. Protože je směrodatná odchylka aritmetického průměru výrazně nižší než chyba jednotlivých měření, jako chybu hustoty nám stačí započítat chybu jednoho měření vydělenou odmocninou z počtu měření.

Je zřejmé, že hustoty obou kapalin jsou blízké hustotě vody. Coca-Cola má vyšší hustotu, což může souviset s tím, že je v ní na 100 ml rozpuštěno více cukru.

Nyní už máme připraveno všechno k tomu, abychom vynesli grafy závislosti intenzity osvětlení na výšce hladiny. Tyto grafy proložíme (opět v programu *Python*) funkcemi

$$E_v(d) = E_{v0}e^{-\alpha d} + E_s.$$

Parametry nalezené proložením jsou uvedeny v následující tabulce 5.

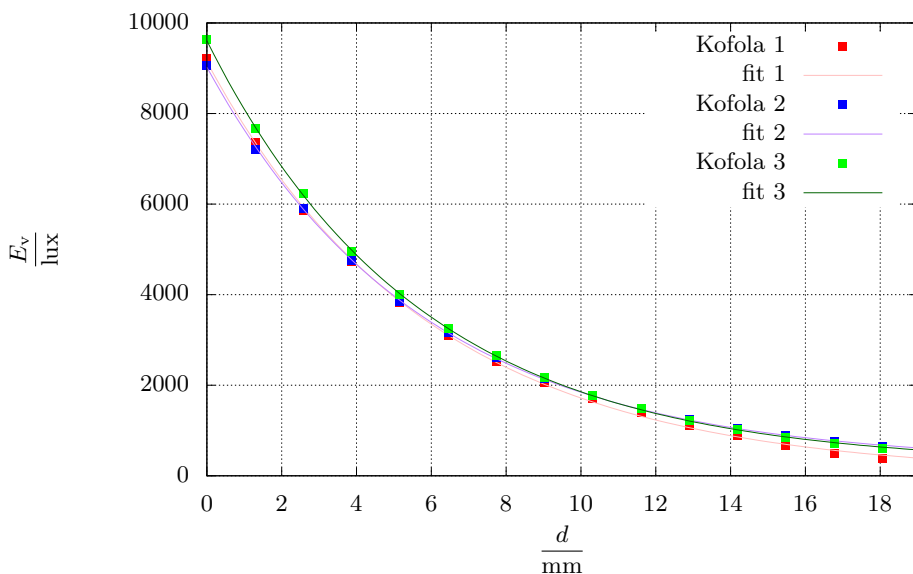
Vidíme, že chyby parametrů jsou minimálně o řád, ale spíše o dva řády nižší než samotné parametry. To znamená, že funkci, kterou prokládáme naměřená data, jsme zvolili vhodně, tato funkce velmi dobře vystihuje závislost intenzity osvětlení na výšce nápoje v krabičce. Velmi dobře je tento souhlas vidět také v grafech 2 a 3. Při přepočtu 30 g nápoje na jeho

Tab. 4: Hodnoty hustot ρ z proložení dat přímkou a jejich chyby. Průměr hustoty a jeho chybu jsme vypočetli podle vzorců (1) a (2).

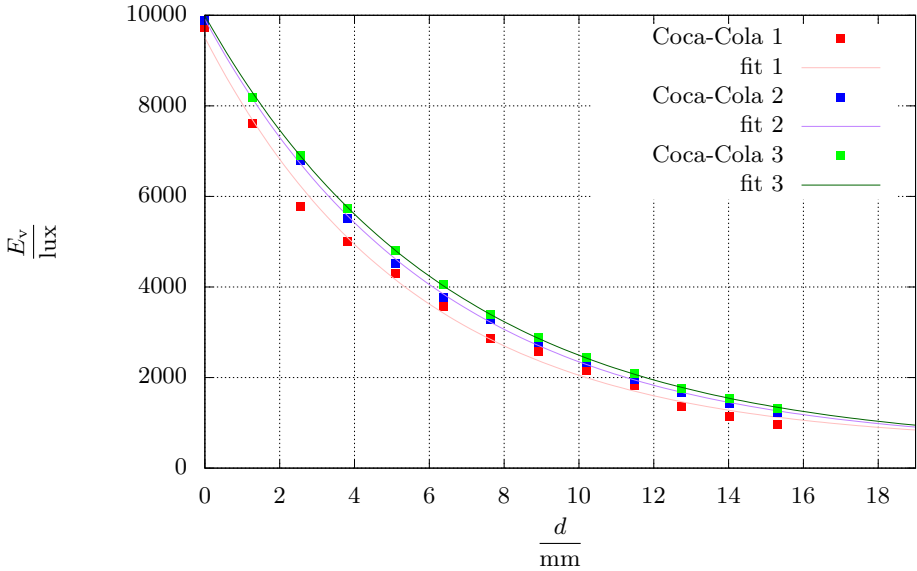
| měření | Kofola | | Coca-Cola | |
|--------|--|--|--|--|
| | $\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$ | $\frac{\Delta\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$ | $\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$ | $\frac{\Delta\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$ |
| 1 | 1,000 1 | 0,005 | 1,009 | 0,004 |
| 2 | 0,996 4 | 0,005 | 1,008 | 0,006 |
| 3 | 0,998 5 | 0,005 | 1,011 | 0,005 |
| průměr | 0,998 | | 1,010 | |
| chyba | 0,003 | | 0,003 | |

Tab. 5: Závislost hmotnosti nápoje na jeho objemu v odměrce.

| Měření | $\frac{E_0}{\text{lux}}$ | $\frac{\Delta E_0}{\text{lux}}$ | $\frac{\alpha}{\text{m}^{-1}}$ | $\frac{\Delta\alpha}{\text{m}^{-1}}$ | $\frac{E_s}{\text{lux}}$ | $\frac{\Delta E_s}{\text{lux}}$ |
|-------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| Kofola 1 | 9 130 | 60 | 0,168 | 0,003 | 17 | 5 |
| Kofola 2 | 8 730 | 30 | 0,172 | 0,002 | 290 | 20 |
| Kofola 3 | 9 370 | 20 | 0,176 | 0,001 | 240 | 20 |
| Coca-Cola 1 | 8 970 | 20 | 0,178 | 0,001 | 530 | 20 |
| Coca-Cola 2 | 9 450 | 70 | 0,161 | 0,004 | 470 | 80 |
| Coca-Cola 3 | 9 560 | 60 | 0,153 | 0,002 | 430 | 60 |



Obr. 2: Závislost intenzity osvětlení na výšce Kofoly.



Obr. 3: Závislost intenzity osvětlení na výšce Coca-Coly.

výšku v krabici jsme zanedbali chyby rozměrů krabičky i hustot nápojů, protože jsou menší než procento. Chybu přístroje, tedy nejistotu v určení intenzity osvětlení, neznáme. Přístroj ale měří s přesností na jednotky lux, zatímco naše měření probíhá na škále stovek až tisíců, můžeme se proto domnívat, že chyba přístroje nebude výrazná.

Chyby fitování parametru α , který nás zajímá nejvíce, jsou velmi malé, proto je dále zanedbáme. Protože jsme provedli tři měření, výslednou hodnotu parametru α pro každý nápoj získáme jako průměr všech tří hodnot, k němu také vypočítáme směrodatnou odchylku. Dostáváme

$$\alpha_{\text{Kofola}} = (0,172 \pm 0,002) \text{ mm}^{-1}.$$

Před výpočtem hodnoty tohoto parametru u Coca-Coly se na chvíli zastavme. Z grafu pro Coca-Colu je vidět, že naměřené datové body z prvního měření jsou oproti dvěma dalším měřením výrazně níže. V průběhu prvního měření se totiž na dně vytvářelo velké množství malých bublinek, které patrně ovlivňovaly průchod světla do senzoru. Také α u prvního měření je výrazně vyšší než u zbývajících dvou. Při nich už se bublinky neobjevovaly. Pro výpočet průměru a směrodatné odchylky tak použijeme data pouze ze druhého a třetího měření Coca-Coly. Dostáváme

$$\alpha_{\text{Coca-Cola}} = (0,157 \pm 0,004) \text{ mm}^{-1}.$$

Absorpční koeficient u Kofoly je vyšší než u Coca-Coly, skrze Kofolu prochází méně světla. Toto pozorování jsme mohli učinit pouhým okem už v průběhu měření. Z Kofoly se tak množství procházejícího světla zmenší e-krát na délce $1/\alpha_{\text{Kofola}} = 5,8 \text{ mm}$, podobně u Coca-Coly to je $6,4 \text{ mm}$.

Diskuze

Experiment byl prováděn v domácích podmínkách, takže dostupnost vhodného experimentálního vybavení byla limitována. Nejvíce tím bylo komplikováno určení výšky nápoje v krabičce. Zvolený postup se nám zdál nejpřesnější. Pokud bychom do krabičky umístili rysku s výškou, mohlo by být odečítání ze stupnice zkesleno kapilárními a jinými jevy. Protože jsme postupovali po relativně malých množstvích nápoje (30 g), neměli jsme k dispozici vhodný předmět na vytvoření tak malého objemu. Při použití většího objemu bychom však při menším počtu kroků dospěli do stavu, kdy se intenzita osvětlení mění již velmi málo. Přesností použité měřky pro kalibraci hmotnost-objem si také nejsme jisti, proto jsme naměřili více bodů a data prokládali přímkou. Vhodnější by celkově bylo použití pipety nebo přesného odměrného válce.

K přesnosti naměřených hodnot intenzity osvětlení se nám bohužel nepodařilo nic dohledat, relativní chybu jednotlivých měření však považujeme i díky průměrování přes několik sekund jako malou (viz výše).

Vzhledem k velmi malým chybám parametrů, které jsme získali proložením hodnot intenzit osvětlení prezentovanou funkcí můžeme soudit, že jsme danou funkcí zvolili dobře. Stejně pozorování lze učinit pouhým pohledem do grafů, kde všechny datové body jsou v těsné blízkosti uvažované funkce. Naše teoretické odvození tak bylo experimentálně ověřeno. Ačkoli jsme při odvození udělali zanedbání v závislosti koeficientu absorpce na vlnové délce, můžeme konstatovat, že toto zanedbání bylo opodstatněné. Viděli jsme sice, že oba nápoje měnily barvu procházejícího světla, na naše úvahy to ale nemělo velký vliv.

První měření Coca-Coly bohužel nemohlo být z důvodu nespolehlivého výsledku započítáno do celkového koeficientu absorpce. Tvorba bublinek snižovala průchod světla a zdánlivě tak zvyšovala absorpční parametr α . Během prvního měření však bublinky postupně vyrchaly a další dvě měření (se stejnou dávkou nápoje) už můžeme považovat za přesná. Bylo by vhodné provést ještě jedno měření, abychom měli výsledek více porovnatelný s Kofolou.

Koeficient absorpce z Kofoly byl větší, ale ne výrazně. Intenzita osvětlení při průchodu oběma nápoji klesne na desetinu už asi po 1,5 cm, což je důvodem, proč se nám láhev tohoto nápoje zdá neprůhledná nebo proč v plné sklenici nevidíme na dno.

Závěr

Naměřili jsme závislost intenzity osvětlení na tloušťce dvou druhů kolových nápojů – Kofoly a Coca-Coly. Kvůli dostupnému experimentálnímu vybavení jsme museli určit i hustotu obou nápojů. Z chyb parametrů vypočítaných v procesu fitování a z prostého pohledu do grafů můžeme konstatovat, že jsme data proložili vhodnou funkcí a že pokles je s tloušťkou nápoje exponenciální. Koeficienty absorpce jsme určili jako $\alpha_{\text{Kofola}} = (0,172 \pm 0,002) \text{ mm}^{-1}$ a $\alpha_{\text{Coca-Cola}} = (0,157 \pm 0,004) \text{ mm}^{-1}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.