Úloha III.S ... vážení riešitelia

10 bodů; (chybí statistiky)

1. *Preveďte z definícií príslušných základných jednotiek do jednotiek SI*
   - *tlak* 1 psi,
   - *energiu* 1 foot − pound,
   - *silu* 1 dyn.

2. *V difrakčnom experimnente bola nameraná mriežková konštanta (dĺžka hrany elementárnej bunky) kuchynskej soli ako* 563 pm. *Známa je tiež jej hustota* 2,16 g·cm^{-3}, *a že kryštalizuje v kubickej, plošne centrovanej sústave. Určite hodnotu atómovej hmotnostnej jednotky.*

3. *Tenká tyč dlhá l s dĺžkovou hmotnosťou λ leží na valci s polomerom R kolmo na jeho os symetrie. Na každom konci tyče je umiestnené závažie s hmotnosťou m tak, že tyč je vo vodorovnej polohe. Hmotnosť jeného závažia opatrne zvýšime na M. Aký uhol voči vodorovnému smeru tyč zaujme? Predpokladajte, že tyč z valca nesklízne.*

4. *Ako by ste zmerali hmotnosť:*
   - *astronauta na Medzinárodnej vesmírnej stanici,*
   - *naloženého ropného tankeru,*
   - *malého asteroidu mieriaceho k Zemi?*

Dodo si stále pletie váhu a hmotnosť.

Úloha 1

Jednotka psi je zkratkou z anglického výrazu „pound per square inch“, přesněji „pound-force per square inch“, což můžeme přeložit jako „libra síly na čtverečný palec“. Jednotky tedy odpovídají definici tlaku jako podílu síly působící na nějakou plochu. Libra síly je jednotka síly, která vyjadřuje, jakou tíhovou silou působí hmotnost jedné libry. Ta je nyní definována přesně jako 0,453 592 37 kg a přenásobením normálním tíhovým zrychlením 9,806 65 m·s^{-2} dostáváme libru síly jako 4,448 22 N.

Palec má délku přesně 2,54 cm = 0,025 4 m, palec čtverečný tak odpovídá ploše $0{,}025\,4^2\ \mathrm{m}^2 = 6{,}451\,6\cdot10^{-4}\ \mathrm{m}^2$. Jednotka tlaku psi tak má v SI hodnotu $1\ \mathrm{psi} = 4{,}448\,22\ \mathrm{N}/6{,}451\,6\cdot10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 6\,894{,}75\ \mathrm{Pa}$. S touto jednotkou se můžeme snadno setkat například na různých ventilech.

Jednotka foot − pound = ft·lb vyjadřuje práci, kterou vykoná jedna libra síly při přesunu tělesa o jednu stopu. Opět tato jednotka reprezentuje přirozené zavedení veličiny, podobně jako psi. Už víme, že jedna libra síly je 4,448 22 N, takže ji stačí jen přenásobit jednou stopou, která má délku přesně 0,304 8 m, takže dostaneme 1 ft·lb = 1,355 8 J. Vidíme, že je tato jednotka podobná jednomu joulu, takže pro řádové odhady energie nemusíme nic přepočítávat. Za zmínku také stojí, že existuje i jednotka „pound-foot“, která je jednotkou momentu síly (obdoba našich N·m). Její hodnota v SI je samozřejmě stejná jako u „foot-pound“.

Předchozí dvě studované jednotky patřily do systému imperiálních jednotek a dnes se užívají spíše jen v USA, Kanadě a Velké Británii. Naopak jednotka „dyne“ patří do systému CGS, kde jsou základní jednotky centimetr, gram a sekunda. Tento systém byl předchůdcem dnešního SI. Definice jednoho dynu je tedy síla, která je potřeba k urychlení tělesa o hmotnosti 1 g o 1 cm·s^{-2}. Dosazením za jednotky SI do této definice dostáváme $1\ \mathrm{dyn} = 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 10^{-5}\ \mathrm{N}$.

Úloha 2

V řešení úlohy spočítáme hmotnost jedné elementární buňky, hmotnost jednotlivých atomů a jejich porovnáním najdeme hledanou atomovou hmotnostní jednotku.

Nejprve připomeňme, jak vypadá elementární buňka soli kamenné neboli NaCl. Uvažujme nejprve atomy sodíku (Na), které jsou umístěny v rozích krychle o straně a a ve středech jejích stěn. To odpovídá kubické plošně centrované mříži s mřížkovou konstantou právě $a = 563\,\mathrm{pm}$. Nyní k jednomu atomu sodíku vložíme jeho partnerský chlor (Cl) tak, že bude posunutý od sodíku o $a/2$ podél hrany elementární buňky. Totéž uděláme pro úplně všechny atomy sodíku, které jsou v krystalu – vložíme k nim chlor. Je tak jasné, že poměr sodíku a chloru je jedna, stejně jako to vidíme z chemického vzorce. Atomy sodíku tvoří kubickou plošně centrovanou mřížku, stejně jako atomy chloru, tato mřížka je však těsně posunuta.[1] Mohli bychom se ptát, proč pak není za elementární buňku zvolena krychle s poloviční délkou hrany a s atomy sodíku a chloru v rozích. Je to kvůli tomu, že by byla porušena translační symetrie v krystalu. Ta jednoduše vyjadřuje, že když se přeneseme o jednu délku a podél hrany krychle, dostaneme naprosto přesně stejné okolí jako před přenesením. V případě uvažované menší krychle bychom se však např. ze sodíkového atomu přesunuli na atom chloru, okolí by se tedy určitě změnilo.

V kubické plošně centrované mříži na jednu buňku připadají 4 atomy. Atom v každém rohu je sdílen osmi stejnými buňkami, ale zase má každá krychle osm vrcholů, takže na každou buňku připadá právě jeden rohový atom. S atomy ve středech stěn je to podobné, každý připadá dvěma buňkám, ale stěn je celkem šest, takže to odpovídá třem stěnovým atomům na buňku. Protože v naší buňce k jednomu atomu sodíku přísluší jeden atom chloru, jsou v krychli o hraně a 4 atomy sodíku a také 4 atomy chloru.

Nyní konečně můžeme pokročit dále. Relativní atomová hmotnost sodíku je $A_{\mathrm{Na}} = 22{,}99$, tedy jeden atom sodíku má v průměru hmotnost 22,99 atomových hmotnostních jednotek. Podobně pro chlor platí $A_{\mathrm{Cl}} = 35{,}45$. Hmotnost jedné elementární buňky proto je

$$m_\square = 4A_{\mathrm{Na}} \cdot m_{\mathrm{u}} + 4A_{\mathrm{Cl}} \cdot m_{\mathrm{u}} = 233{,}8 \cdot m_{\mathrm{u}}\,.$$

Ze znalosti hustoty a objemu elementární buňky spočítáme její hmotnost jako

$$m_\square = \rho V = \rho a^3 = 2\,160\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot \left(563 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\right)^3 = 3{,}85 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}\,.$$

Z rovnosti obou vyjádření $m_\square$ dostáváme

$$m_{\mathrm{u}} = \frac{\rho a^3}{233{,}8} = 1{,}65 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,,$$

což je velmi blízko udávané hodnotě $m_{\mathrm{u}} = 1{,}660\,5 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Úloha 3

Uvažujme situaci, kdy se tyč vychýlila o úhel φ měřený od původního bodu dotyku do současného. Na jedné straně je po vychýlení tyč dlouhá $l/2 + \varphi R$, kde φ je úhel bodu dotyku tyče s válcem měřený od kolmice a udávaný v radiánech. Na druhé straně je pak její délka $l/2 - \varphi R$. Tyč se při vychylování nepřesmykovala, proto bod dotyku musel urazit stejnou vzdálenost, jakou na válci vytíná úhel φ.

[1] `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Ionlattice-fcc.svg`

Uvažujme vodorovné průměty vzdáleností těžišť jednotlivých částí (tedy obou závaží a částí tyče) od bodu dotyku. Tyto vzdálenosti vynásobíme tíhou, kterou jednotlivé části působí, abychom dostali momenty sil. Na jedné straně působí moment síly

$$M_1 = \left(Mg\left(\frac{l}{2} - \varphi R\right) + \lambda\left(\frac{l}{2} - \varphi R\right) g \frac{\frac{l}{2} - \varphi R}{2} \right) \cos\varphi\,,$$

na druhé pak

$$M_2 = \left(mg\left(\frac{l}{2} + \varphi R\right) + \lambda\left(\frac{l}{2} + \varphi R\right) g \frac{\frac{l}{2} + \varphi R}{2} \right) \cos\varphi\,.$$

Hmotnost části tyče určíme jako jednoduchý součin její délky a délkové hustoty, těžiště se nachází v její polovině. Tuto úvahu použijeme zvlášť pro jednotlivé části tyče.

Tyč už nevykonává žádný pohyb, takže z rovnosti momentů sil dostáváme rovnici

$$Ml - 2M\varphi R + \lambda\left(\frac{l^2}{4} - l\varphi R + \varphi^2 R^2\right) = ml + 2m\varphi R + \lambda\left(\frac{l^2}{4} + l\varphi R + \varphi^2 R^2\right)\,.$$

$$Ml - 2M\varphi R - \lambda l\varphi R = ml + 2m\varphi R + \lambda l\varphi R\,.$$

odkud máme

$$\varphi = \frac{l}{2R}\frac{(M-m)}{(m+M)+\lambda l}\,.$$

Vidíme, že výchylka je úměrná přidané hmotnosti $M-m$. Pomocí úhlu náklonu tak zjistíme, jak velkou hmotnost jsme přidali. Pro praktické využití bychom museli umět přesně měřit úhel a tyč příliš nezatěžovat, aby z válce nesklouzla nebo se nepřevrhla.

Úloha 4

Protože se na oběžné dráze vyrovnává gravitační síla s odstředivou, pohybují se astronauti ve stavu beztíže. Nemohou tak využít základní princip vážení, který používáme my na Zemi a který spočívá v přepočtu tíhové síly na hmotnost pomocí hodnoty tíhového zrychlení. Není možné využít sílu ve tvaru $F = mg$, je potřeba k určení hmotnosti použít sílu $F = ma$, tedy astronaut musí měnit svou hybnost a podle toho se určí jeho hmotnost.

Jednoduchým příkladem, který je možné v těchto podmínkách realizovat, je pružinový harmonický oscilátor. Jeho bilance sil je $-ky = ma$, kde k je tuhost pružiny a y je výchylka z rovnovážné polohy. Řešením této rovnice jsou harmonické kmity s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Díky znalosti tuhosti pružiny a změření periody kmitů můžeme určit hmotnost těles i ve stavu beztíže a v omezeném prostoru. Astronauti opravdu zařízení založené na tomto principu na ISS mají.

Pro určení hmotnosti ropného tankeru využijeme Archimédův zákon. Tíhová síla, kterou celý tanker působí, musí být vyrovnána vztlakovou silou vody v rovnosti

$$mg = V\rho_{\mathrm{w}} g \quad \Rightarrow \quad m = V\rho_{\mathrm{w}}\,,$$

kde m je hledaná hmotnost, g je tíhové zrychlení, V je objem ponořené části lodi a $V\rho_{\mathrm{w}}$ je hustota vody. Hustotu okolní vody dokážeme snad změřit a objem V ponořené části můžeme určit ze znalosti profilu lodi a hloubky jejího ponoření. Lodě na sobě mívají rysky, podle kterých lze hloubku ponoru určit. Tvar lodi pod hladinou může být takový, že jeho objem nezvládneme přímo vyjádřit pomocí nějakého vzorečku, ale když známe, jak loď vypadá, určitě není problém jej spočítat. Posádka lodi proto mívá k dispozici přepočet z naměřené hloubky ponoru na ponořený objem.

U asteroidů využíváme k měření jejich hmotnosti ještě jiný způsob – sledujeme, jak gravitačně působí na objekty ve svém okolí. Sledujeme polohu asteroidu i druhého objektu a hmotnost můžeme dopočítat například z periody oběhu obou těles. To je příklad situace, kdy má asteroid svůj vlastní měsíček. Takové situace ovšem bývají poměrně vzácné, protože asteroidy obvykle nemívají dostatečnou hmotnost na to, aby nějaký objekt zachytily a udržely ve svém gravitačním poli. Pokud už takový případ nastane, měsíčky mohou být natolik malé, že je až nemožné je vůbec detekovat.

Pokud se dva asteroidy přiblíží k sobě, můžeme z odchýlení jejich vzájemného pohybu určit jejich hmotnost. Ideálním případem je, když jedním z těles je vyslaná sonda. Toto řešení však bývá finančně vysoce nákladné.

Pokud není k dispozici žádné těleso, na které by zkoumaný asteroid mohl gravitačně působit, nezbývá než se spolehnout na odhad. Z infračervené jasnosti určíme rozměry asteroidu a hustotu odhadneme na základě zkušeností z jiných měření. Vypočítaná hmotnost je pak ale v každém případě spíše řádovým odhadem.

Komentář k došlým řešením

První podúloha byla za 2 body, přičemž plný počet bodů mohl dostat jen ten, kdo dle zadání spočítal výsledek z definice, tedy vypsal např. hmotnost libry nebo délku stopy. Pokud někdo napsal pouze správný výsledek, byl mu připsán jen jeden bod.

Druhá podúloha byla taktéž za 2 body. Zde jste většinou správně spočítali hmotnost jedné elementární buňky, problémem ale bylo určit, kolik a jakých atomů se v ní nachází a jaké jsou jejich relativní hmotnosti. Plný počet bodů získali jen ti se správným postupem a výsledkem (který nebylo těžké si zkontrolovat v kterýchkoli tabulkách).

Ve třetí části jsme udělovali 3 body. První bod byl za konstatování rovnosti sil, další za uvedení závislosti mezi polohou středu tyčky od bodu dotyku s válcem a úhlem vychýlení a za nějaký základní výpočet. Plný počet bodů pak byl za správné řešení. Bohužel zadání nebylo zcela jednoznačné a mnozí z vás si situaci představili jinak, než bylo naším cílem. V takovém případě jsme bodovali i správný výpočet při nesprávném nákresu problému.

V poslední části byla každá otázka za jeden bod. U tankeru byla většina odpovědí týkajících se vztlakové síly uznána za správnou. U vážení astronauta bylo častou odpovědí, že na něj aplikujeme sílu a změříme zrychlení. Takovou odpověď jsme neuznávali, pokud nebylo specifikováno, jakou sílu použijeme a jak ji aplikovat. Na Zemi se při vážení také aplikuje síla – tíhová, ta ale ve vesmíru není k dispozici a je potřeba ji nějak konkrétně nahradit. U problému s asteroidem bylo potřeba si uvědomit, že z jeho dráhy v gravitačním poli výrazně hmotnějšího tělesa jeho hmotnost určit nelze. Jako správné byly uvažovány odpovědi, které rozebíraly otázku srážky s tělesem o známé hmotnosti, podobně jako u problému s astronautem.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.