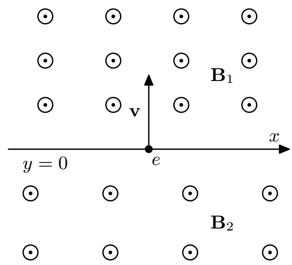
Úloha IV.3 ... krok sem, krok tam

6 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujme homogenní magnetické pole o indukci B_1. To se rozprostírá v poloprostoru, který je ohraničen rovinou rozhraní $y = 0$, za kterou je stejně orientované, taktéž homogenní magnetické pole o indukci B_2. Z roviny rozhraní, kolmo k němu a k siločárám polí, vyletí elektron rychlostí v (jako na obrázku). Určete velikost i směr jeho průměrné rychlosti rovnoběžné s rovinou rozhraní.



Bonus: Uvažujte nyní, že se velikost pole mění lineárně jako $B = B_0\left(1 + \alpha y\right)$ a jeho směr je v kladném směru osy z. I v tomto případě určete velikost i směr průměrné rychlosti elektronu rovnoběžné s rovinou rozhraní. Elektron na začátku vypouštíme stejně jako v předchozím případě.

Jarda jde vpřed o krok, ale o dva zpátky.

Na elektron působí magnetická síla o velikosti $F = Bve$. Ta působí kolmo na jeho rychlost, takže se elektron pohybuje po kružnici, přičemž její poloměr určíme z dostředivé síly jako

$$Bve = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{Be}\,.$$

Je tedy zřejmé, že poloměr pohybu elektronu závisí na velikosti magnetické indukce.

Čas, za který elektron oběhne polovinu kružnice, je

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{Be}\,.$$

Při oběhu poloviny kružnice se elektron dostane do oblasti s odlišným magnetickým polem, kde čas i poloměr jsou odlišné. Pokud je směr magnetických siločar v obou poloprostorech stejný (tedy jak je tomu v zadání), zahýbá elektron stejným směrem a vrací se tak ke svému výchozímu bodu. Za směr otočení rychlosti o 360° se tedy posune jeho poloha v rovině rozhraní o

$$2\left(r_2 - r_1\right) = 2\frac{mv}{e}\left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1}\right)\,.$$

Pokud by bylo znaménko magnetických indukcí navzájem opačné, elektron by na rozhraní začal zatáčet v opačném směru, směr jeho rychlosti by se neotočil o 360° a jeden z poloměrů by měl záporné znaménko. Na tvaru rovnic by se však nic nezměnilo. Toto uspořádání však už dále nebudeme uvažovat.

Počáteční vektor rychlosti získá elektron po čase

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{e}\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right)\,.$$

Jeho průměrná rychlost pohybu v rovině rozhraní tak je

$$v_{\mathrm{a}} = 2\frac{r_2 - r_1}{t_1 + t_2} = \frac{2v}{\pi}\frac{B_1 - B_2}{B_2 + B_1}\,.$$

Uvažujme směr osy x jako na obrázku v zadání, osu z vystupující z obrázku směrem ke čtenáři a osu y mířící nahoru. Pokud magnetické pole míří po směru osy z jako na obrázku a počáteční rychlost elektronu je v kladném směru osy y, pak se pro $B_1 > B_2$ elektron pohybuje v kladném směru osy x.

Řešení bonusu

Situace je stejná jako v předchozím případě, ale nyní již není pro $\alpha \neq 0$ pohyb elektronu po kružnici. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\alpha > 0$. Pohybové rovnice elektronu jsou

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} B_0 \left(1 + \alpha y\right) \dot{y}\,,$$
$$\ddot{y} = \frac{e}{m} B_0 \left(1 + \alpha y\right) \dot{x}\,,$$

kde m je hmotnost elektronu a tečky nad souřadnicemi značí jejich časové derivace. Pro jednodušší zápis zavedeme substituci $eB_0/m = \gamma$. Všimneme si, že první z rovnic můžeme zintegrovat podle času na

$$\dot{x} = -\gamma \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \alpha y\right)^2 + C\,,$$

kde C je integrační konstanta. V čase $t = 0$ je elektron v rovině $y = 0$ a jeho x-ová složka rychlosti je nulová, proto $C = \gamma/(2\alpha)$.

Dosazením $\dot{x}$ do druhé pohybové rovnice dostáváme diferenciální rovnici už jenom v proměnné y

$$\ddot{y} = \gamma \left(1 + \alpha y\right) \left(-\frac{\gamma}{2\alpha} \left(1 + \alpha y\right)^2 + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)\,.$$

Vynásobením $\dot{y}$ dostaneme

$$\ddot{y}\dot{y} = -\frac{\gamma^2}{2} \left(2y + 3\alpha y^2 + \alpha^2 y^3\right) \dot{y}\,,$$

což můžeme zintegrovat na

$$\left(\dot{y}\right)^2 = -\gamma^2 \left(y^2 + \alpha y^3 + \frac{1}{4}\alpha^2 y^4 + K\right)\,,$$

kde K je opět integrační konstanta. Z počáteční podmínky platí $K = -v^2/\gamma^2$. Protože na levé straně rovnice je kvadrát, tedy nezáporné číslo, musí platit

$$y^2 + \alpha y^3 + \frac{1}{4}\alpha^2 y^4 - \frac{v^2}{\gamma^2} = \left(\left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right) y + \frac{v}{\gamma}\right) \left(\left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right) y - \frac{v}{\gamma}\right) \leq 0\,.$$

Rovnosti nastávají pro řešení rovnic

$$\alpha y^2 + 2y + \frac{2v}{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}, y_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}\,,$$
$$\alpha y^2 + 2y - \frac{2v}{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}, y_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}\,.$$

Pro $2\alpha v/\gamma > 1$ tak existují dvě reálná řešení, v případě rovnosti jsou tři a jinak jsou kořeny dokonce čtyři.

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že elektron z roviny $y = 0$ vylétá s rychlostí v do směru rostoucího y.

Nejdříve uvažujme, že existují všechny čtyři kořeny. Pak je nerovnost splněna na intervalech $y \in [y_1, y_2]$ a $y \in [y_3, y_4]$. První interval ovšem nevyhovuje počáteční podmínce, kde $y = 0$, takže jej v dalším řešení nemusíme uvažovat. Elektron se totiž do tohoto intervalu z toho druhého dostat nemůže, potřeboval by k tomu vyšší počáteční rychlost.

Nejprve kvalitativně popíšeme, jak se elektron v intervalu $y \in [y_3, y_4]$ chová. Po vypuštění kolmo na $y = 0$ má maximální y-ovou rychlost v. Magnetická síla ovšem jeho dráhu zahýbá až do bodu, kdy jeho y-ová složka rychlosti klesne na nulu (pokud vypouštíme ve směru rostoucího y), tak se tak stane v $y = y_4$. Elektron dále zahýbá zpátky směrem k $y = 0$, a to po trajektorii symetrické k té, po které se dostal do $y = y_4$. Rovinou $y = 0$ proletí opět kolmo na ni rychlostí v, ale v opačném směru, než vylétal. Podobný oblouk udělá i v polorovině $y < 0$. Protože v tomto případě $y_3 > -1/\alpha$, nedostane se elektron do oblasti, ve které by orientace magnetického pole byla opačná, proto magnetická síla zatáčí elektron vždy jen do jednoho směru. Simulaci trajektorie v tomto případě můžete vidět na obrázku 1.

Čas, který elektron letí ve směru rostoucího y, je stejný, jako když letí v opačném směru. Proto můžeme vyjádřit celkový čas T, za který se jeho rychlost vrátí do výchozího stavu, jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\int_{y_3}^{y_4} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2}}\,.$$

Za tento čas se elektron v ose x posune o

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma y \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right) \quad \Rightarrow \quad X = 2\int_{y_3}^{y_4} \frac{-\gamma y \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)}{\sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Nejprve řešme první integrál. Zavedením substituce $Y = 2\alpha/y$ a následně položením $c = 2\gamma/(\alpha v)$ upravíme na tvar

$$T = \frac{2c}{\gamma}\int_{Y_3}^{Y_4} \frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{1 - c^2 Y^2 (1 + Y)^2}}\,.$$

Substitucí $cY(1 + Y) = \sin u$ dostáváme $\mathrm{d}Y = \cos u\,\mathrm{d}u/(c(2Y + 1))$ a po dosazení $2Y + 1 = \sqrt{1 + (4/c)\sin u}$ pak

$$T = \frac{2}{\gamma}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + \frac{4}{c}\sin u}}\,.$$

Integrál pro X převedeme na tvar

$$X = -\frac{4}{\alpha}\int_{Y_3}^{Y_4} \frac{cY(1 + Y)\,\mathrm{d}Y}{\sqrt{1 - c^2 Y^2 (1 + Y)^2}}\,,$$

odkud analogicky dostaneme

$$X = -\frac{2v}{\gamma}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \frac{4}{c}\sin u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

Hodnoty integrálů už závisí pouze na parametru c. Rychlost v ose x tak je

$$v_x = \frac{X}{T} = -v\frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}\,\mathrm{d}u}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}} = v\ f\left(\frac{2B_0 e}{\alpha m v}\right)\,.$$

Pokud existují pouze dva kořeny rovnice pro $\dot{y}$, pak $y \in [y_1, y_4]$ a mění se tedy spodní integrační mez z y_3 na y_1. Nyní ovšem nemůžeme použít substituci za $cY\,(Y+1)$ tak, jak jsme to udělali v předchozím textu, protože na daném intervalu už zobrazení mezi jednotlivými funkcemi není prosté – pro jedno u můžeme najít více Y.

Můžeme si ovšem všimnout, že funkce $1/\left(\sqrt{1-c^2Y^2\,(1+Y)^2}\right)$ je symetrická vůči bodu $-1/2$. Dosazením $Y = -1/2 \pm \xi$ totiž opravdu dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(-\frac{1}{2}-\xi\right)^2\left(1-\frac{1}{2}-\xi\right)^2}} &=\\ = \frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2}} &=\\ = \frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(-\frac{1}{2}+\xi\right)^2\left(1-\frac{1}{2}+\xi\right)^2}}&\,.\end{aligned}$$

Stačí nám tedy integrovat od $1/2$ do Y_4 a výsledek vynásobit dvěma. Na tomto intervalu už je substituce prostá, takže celkový čas můžeme vyjádřit jako

$$T = \frac{4}{\gamma}\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}\,,$$

kde platí $c\,(-1/2)\,(1-1/2) = -c/4 = \sin\theta$. Zde už $c < 4$ (viz podmínka pro počet kořenů), takže řešení vždy existuje.

Analogicky najdeme i hodnotu posunu ve směru osy x jako

$$X = -\frac{4v}{\gamma}\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}\,\mathrm{d}u\,,$$

a tedy v případě, že $2\alpha v/\gamma > 1$ dostáváme průměrnou rychlost

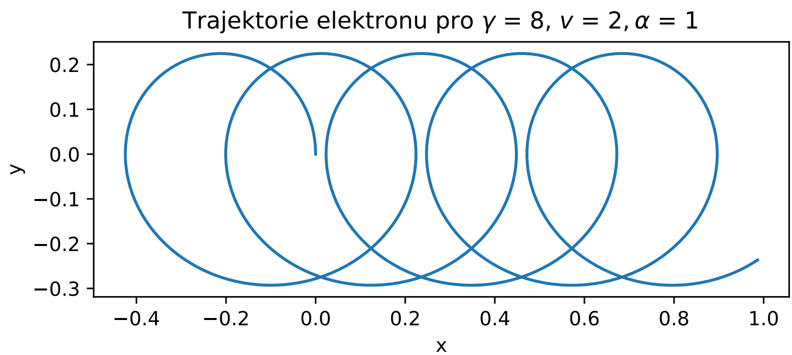
$$v_x = \frac{X}{T} = -v\frac{\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}\,\mathrm{d}u}{\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}} = v\ g\left(\frac{2B_0 e}{\alpha m v}\right)\,.$$

Jak se v tomto případě elektron chová kvalitativně? Po vypuštění udělá podobný oblouk jako v případě $c > 4$, ale na druhé polorovině se dostane do oblasti, kde má magnetické pole opačné znaménko. Magnetická síla tak začne působit druhým směrem. Složka y rychlosti elektronu zase naroste na maximální hodnotu a obkrouží smyčku druhým směrem. Zbytek pohybu je symetrický, akorát se elektron vrací zpět k $y = 0$. Jeho trajektorie tak tvoří jakousi neuzavřenou osmičku. Jednu konkrétní trajektorii můžete vidět na obrázku 3.

Poslední je případ, kdy $2\alpha v/\gamma = 1$. Elektron se dostane na přímku $y = -1/\alpha$, a to rovnoběžně. Na této přímce je nulová intenzita magnetického pole, na elektron nepůsobí žádná síla a on se tak pohybuje rovnoměrně přímočaře. Jeho průměrná rychlost ve směru x je proto v. Trajektorie je zobrazena na obrázku 2.

Se zvětšujícím se c klesá rychlost k nule (větší c jde totiž udělat klesající rychlostí v nebo klesajícím gradientem α, takže elektron se více pohybuje po kružnici).

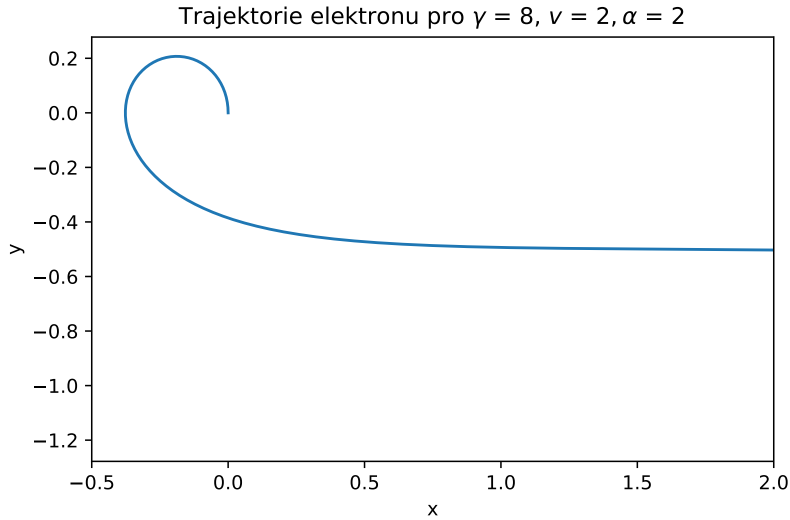
To, že nedokážeme závislosti rychlosti vyjádřit pomocí standardních funkcí, není žádný fyzikální problém, na následujícím obrázku 4 je tato funkce vykreslena. Směr kladné rychlosti v_x míří do směru rostoucího x.



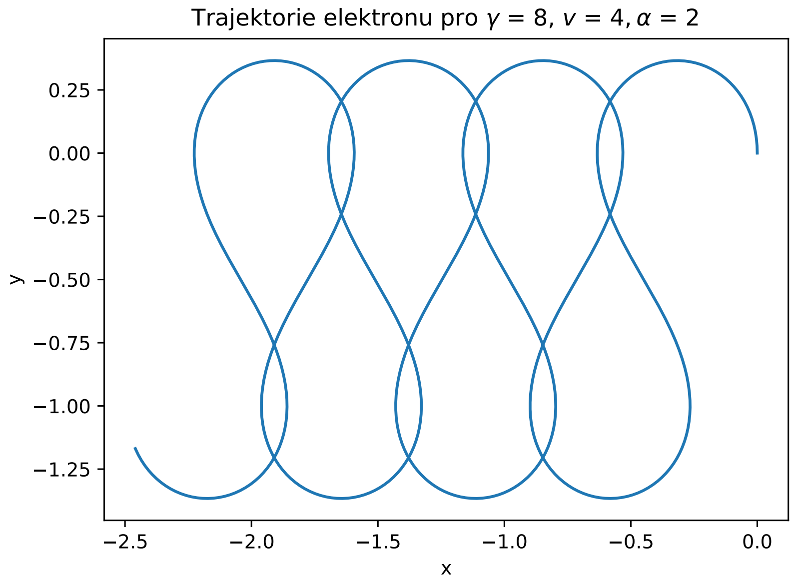
Obr. 1: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $v = 2$ a $\alpha = 1$ v jednotkách SI - odpovídá 4 kořenům.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

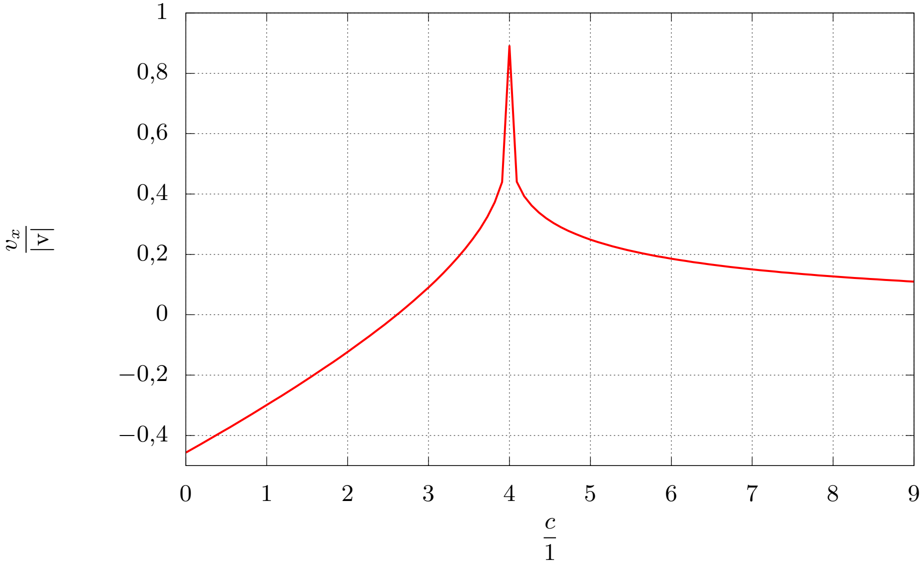
Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.



Obr. 2: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $v = 2$ a $\alpha = 2$ v jednotkách SI - odpovídá 3 kořenům.



Obr. 3: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $v = 4$ a $\alpha = 2$ v jednotkách SI - odpovídá 2 kořenům.



Obr. 4: Závislost x-ové složky rychlosti na parametru c. Vyjádřeno v jednotkách v.