Úloha IV.5 ... malej Jágr

9 bodů; (chybí statistiky)

Malý Jágr a jeho kamarádi by rádi vyrazili hrát hokej. Mrznout však začalo teprve nedávno, a tak neví, jestli je led na rybníku dostatečně tlustý. Spočtěte, za jak dlouho dostatečně promrzne hluboký rybník, pokud víte, že voda má na začátku teplotu 0 °C*, vzduch se udržuje na konstantních* −10 °C *a minimální tloušťka ledu pro bezpečné bruslení je* 10 cm*. Hustota vody ani vznikajícího ledu se s hloubkou nemění. Přestup tepla mezi vzduchem a ledem i vodou a ledem je mnohem rychlejší než vedení tepla v ledu. Potřebné tepelné vlastnosti ledu si dohledejte.*

Alešův kolega Pepa vzpomínal na maturitu na Kepleru.

Víme, že voda a vzduch si s ledem vyměňují teplo velmi rychle. To pro nás znamená, že teplota ledu v místě dotyku se vzduchem je po celou dobu konstantní a rovna $T_{\mathrm{vz}} = -10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Totéž platí i pro led v kontaktu s vodou, jehož teplota je $T_{\mathrm{v}} = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Teplota ledu se tedy v různých místech mění a ze symetrie je jasné, že se mění pouze v závislosti na hloubce y. Vodorovnou ploškou ledu o obsahu A potom protéká takový tepelný tok P, že platí

$$\frac{P}{A} = \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\,,$$

kde $\lambda = 2{,}2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ je tepelná vodivost ledu. Obecně by se nám mohlo stát, že by gradient teploty (tj. změna teploty V závislosti na hloubce) nebyl konstantní. Potom by nám do malého objemu $A\,\mathrm{d}y$ například mohlo vtékat více tepla než vytéká (první derivace se ve vztahu pro tepelný výkon mění). Tento nadbytečný výkon by se spotřebovával na ohřátí ledu, dokud by se gradient teploty nevyrovnal (přesně takto funguje rovnice vedení tepla).

Situace v naší úloze je následující. Začínáme s tenkou vrstvou ledu, na hranicích se udržují konstantní teploty T_{v} a T_{vz}, uprostřed ledové vrstvy se teplota mění – pro začátek neznámým způsobem. Ledem prochází tepelný tok, který odebírá teplo vodě, čímž mění její skupenství (vrstva ledu se zvětšuje). Tento výkon prochází dále ledovou vrstvou a část z něj se spotřebuje na vyrovnávání teplotního gradientu (jak bylo popsáno výše). Uvědomme si však, že na změnu skupenství vrstvy vody je potřeba mnohem více tepla než na malé změny teploty v ledové vrstvě. Teplotní gradient se tedy bude vyrovnávat mnohem rychleji, než bude přibývat nový led. Proto budeme dále pro zjednodušení výpočtů předpokládat, že závislost teploty ledu na hloubce y bude pro každou tloušťku ledu h lineární. Tedy platí

$$T(y,h) = T_{\mathrm{vz}} + \frac{T_{\mathrm{v}} - T_{\mathrm{vz}}}{h}\cdot y = T_{\mathrm{vz}} + \frac{\Delta T}{h}\cdot y\,,$$

kde jsme označili $\Delta T = T_{\mathrm{v}} - T_{\mathrm{vz}}$ rozdíl mezi teplotou vody a vzduchu.

Nyní přejdeme k samotnému výpočtu tloušťky ledu. Za krátký čas $\mathrm{d}t$ odevzdají voda a led o průřezu A v důsledku vedení teplo o velikosti

$$\mathrm{d}Q = P\,\mathrm{d}t = \lambda A\,\frac{\Delta T}{h}\,\mathrm{d}t\,.$$

Část tohoto tepla se spotřebuje na změnu skupenství vody o hmotnosti $\mathrm{d}m$, tedy

$$\mathrm{d}Q_1 = l\,\mathrm{d}m = l\rho A\;\mathrm{d}h\,,$$

kde $\rho = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota ledu a $l = 334\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ je měrné skupenské teplo tání ledu. Zbytek se přemění na ochlazení samotného ledu, neboť podle našich předchozích úvah pro teplotu ledu v závislosti na y musí platit

$$T(y, h + \mathrm{d}h) = T_{\mathrm{vz}} + \frac{\Delta T}{h + \mathrm{d}h}\cdot y\,.$$

Derivací vztahu pro teplotu podle h zjistíme, o kolik se musí změnit teplota ledu v hloubce y

$$\mathrm{d}T(y) = \frac{\partial T}{\partial h}\,\mathrm{d}h = -\frac{\Delta T}{h^2}\cdot y\,\mathrm{d}h\,.$$

Plošce ledu o průřezu A a tloušťce $\mathrm{d}y$ v hloubce y tedy musíme odebrat teplo:

$$\mathrm{d}Q_2'(y) = \mathrm{d}mc\,|\mathrm{d}T(y)| = A\ \rho c\,\mathrm{d}y\frac{\Delta T}{h^2}\cdot y\,\mathrm{d}h\,,$$

kde $c = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita ledu. Integrací přes celou vrstvu ledu pak získáme celkové teplo, které se odebere ledu za čas $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}Q_2 = A\rho c\frac{\Delta T}{h^2}\,\mathrm{d}h\int_0^h y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A\ \rho c\Delta T\,\mathrm{d}h\,.$$

Máme tedy, že za čas $\mathrm{d}t$ se vedením tepla odebere

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 = A\ \rho\left(l + \frac{1}{2}c\Delta T\right)\mathrm{d}h\,.$$

Zde vidíme význam našich předchozích úvah, že teplota ledu se vyrovnává rychleji, než přimrzá led, neboť l je přibližně 30krát větší, než člen $c\Delta T/2$. Teplo $\mathrm{d}Q$ nyní porovnáme s tepelným výkonem

$$\mathrm{d}Q = P\,\mathrm{d}t = \lambda A\frac{\Delta T}{h}\,\mathrm{d}t$$

Odtud dostaneme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} A\rho\left(l + \frac{1}{2}c\Delta T\right)\mathrm{d}h &= \lambda A\frac{\Delta T}{h}\,\mathrm{d}t\\ \int h\,\mathrm{d}h &= \frac{\lambda\Delta T}{\rho\left(l + \frac{1}{2}c\Delta T\right)}\int\mathrm{d}t\\ \frac{1}{2}h^2 + C &= \frac{\lambda\Delta T}{\rho\left(l + \frac{1}{2}c\Delta T\right)}t\,. \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek zjistíme $C = 0$. Dosazením všech konstant pak pro dobu do zamrznutí ledu na potřebnou tloušťku $H = 10\,\mathrm{cm}$ máme

$$t = \frac{\rho\left(l + \frac{1}{2}c\Delta T\right)}{\lambda\Delta T}\cdot\frac{1}{2}H^2 = 19{,}9\,\mathrm{h} \doteq 20\,\mathrm{h}\,.$$

Jarda Jágr a jeho kamarádi tedy musí počkat přibližně 20 hodin. Ze života však víme, že na dostatečné zamrznutí rybníku musíme čekat obvykle několik dní. To je například proto, že teplota rybníku nezačíná na 0 °C, voda v rybníku proudí, tepelná výměna mezi ledem a vzduchem nemusí být tak rychlá, jak předpokládáme atd.

Hlubší zamyšlení nad rovnicí vedení tepla

Rovnice vedení tepla říká

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{1}$$

V předchozím postupu řešení se předpokládá, že teplota ve vrstvách ledu se mění v čase (levá strana rovnice vedení tepla by byla nenulová), ale přitom je závislost teploty na hloubce lineární, tudíž gradient teploty je konstantní, a tedy by pravá strana rovnice vedení tepla byla nulová. To vede k paradoxům.

Přírůstky ledu můžeme spočítat z gradientu teploty v místě kontaktu ledu s vodou podle vztahu

$$\frac{P}{A} = \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}.$$

Učinili jsme předpoklad, že teplota se v ledu mění s hloubkou lineárně, tudíž gradient teploty je ve všech hloubkách stejný

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = \frac{\Delta T}{h}.$$

Teplo odebrané vodě je

$$\mathrm{d}Q = P\,\mathrm{d}t = \lambda A \frac{\Delta T}{h}\,\mathrm{d}t.$$

Část vody se díky odebrání tepla $\mathrm{d}Q$ změní na vrstvičku ledu o tloušťce $\mathrm{d}h$

$$\mathrm{d}Q = l\,\mathrm{d}m = A\rho l\,\mathrm{d}h.$$

Spojením dvou předchozích vztahů dostaneme diferenciální rovnici

$$h\,\mathrm{d}h = \frac{\lambda \Delta T}{\rho l}\,\mathrm{d}t,$$

jejímž řešením s okrajovými podmínkami je

$$\begin{aligned}
\int_0^H h\,\mathrm{d}h &= \frac{\lambda \Delta T}{\rho l} \int_0^t \mathrm{d}\tau,\\
\frac{1}{2}H^2 &= \frac{\lambda \Delta T}{\rho l} t,\\
t &= \frac{\rho l}{2\lambda \Delta T} H^2,\\
t &= 19{,}3\,\mathrm{h} \doteq 19\,\mathrm{h}.
\end{aligned}$$

Na základě učiněného předpokladu o lineární změně teploty s hloubkou jsme dvěma různými postupy došli ke dvěma různým výsledkům. Díky tomu, že člen $c\Delta T/2$ je mnohem menší než měrné skupenské teplo tání ledu l, se ale číselné výsledky výrazně neliší. Ve Vašich řešeních jsme uznávali oba postupy.

Problém s oběma postupy je v tom, že už samotný předpoklad o lineární změně teploty s hloubkou není správný. Jak jsme ukázali v rovnici (1), v takovém případě by nemohlo docházet ke změnám teploty v čase. Místo toho je nutné řešit parciální diferenciální rovnici vedení tepla.

Řešení této rovnice vůbec není triviální, protože oblast, ve které hledáme řešení $0 \leq y \leq h$, se s časem zvětšuje $h = h(t)$.

Jiří Kohl
jiri.kohl@fykos.cz

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.