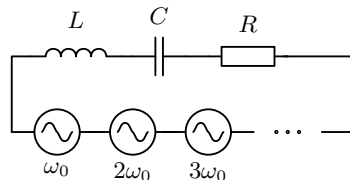


Úloha V.5 ... ladíme obvod

9 bodů; průměr 1,64; řešilo 22 studentů

Uvažujme sériově zapojený obvod s rezistorem o odporu R , cívkou a kondenzátorem s kapacitou C . Sériově k těmto prvkům jsou zapojeny zdroje střídavého napětí vždy se stejnou amplitudou U , které se ovšem liší svou frekvencí, která je $n\omega_0$, kde n je přirozené číslo. Jaká může být frekvence ω_0 , abychom dokázali najít cívku s takovou indukčností L , aby na rezistoru byla napětí s frekvencí jinou než $N\omega_0$ potlačena alespoň o 90%? N je předem známé přirozené číslo (tj. hodnota ω_0 na něm může záviset) a napětí s frekvencí $N\omega_0$ naopak více než o 90% potlačit nechceme.



Jarda chtěl mít v obvodu co nejvíce různých zdrojů.

Podívejme se nejprve na jednodušší situaci. Pro napětí na rezistoru v sériovém RLC obvodu s impedancí z_n se zdrojem napětí o průběhu $U_n = U \sin(n\omega_0 t)$ platí

$$U_R = IR = \frac{U}{|z|} R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C})^2}} U.$$

Chceme-li, ať je napětí na tomto rezistoru utlumen alespoň o 90%, musí platit $U_R \leq \alpha U$ pro $\alpha = 0,1$.

Zapojíme-li nyní do obvodu více zdrojů jako v zadání, bude celkové napětí dáno jejich superpozicí. Z lineárního chování RLC obvodu ale plyne, že můžeme napětí o různých frekvencích řešit zvlášť – pro každé si spočítáme impedanci a dle vztahu výše odvodíme dílčí napětí na rezistoru.

Podmínka ze zadání pak tedy říká, že pro všechna $n \neq N$ musí platit

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C})^2}} \leq \alpha \quad (1)$$

a zároveň

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (N\omega_0 L - \frac{1}{N\omega_0 C})^2}} > \alpha. \quad (2)$$

Nechť nyní $n \neq N$ a řešme nerovnici (1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 &\leq R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right)^2, \\ R\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} &\leq \left|n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right|, \end{aligned} \quad (3)$$

odkud

$$L \in \mathbb{R}^+ \setminus \left(\frac{1}{n^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{n\omega_0}, \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{n\omega_0} \right),$$

kde $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ a $n \neq N$; pro úplnou korektnost také zmíňme, že množinou \mathbb{R}^+ formálně nerozumíme množinu kladných reálných čísel, ale množinu přípustných hodnot indukčností cívek (rozdíl je v jednotce). Analogicky také vyřešíme rovnici (2), odkud dostaneme

$$L \in \left(\frac{1}{N^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{N\omega_0}, \frac{1}{N^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{N\omega_0} \right).$$

Pokud pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$l_n = \frac{1}{n^2 \omega_0^2 C} - \frac{A}{n \omega_0},$$

$$p_n = \frac{1}{n^2 \omega_0^2 C} + \frac{A}{n \omega_0},$$

a $J_n = (l_n, p_n)$ interval s těmito krajními body, můžeme podmínku ze zadání přepsat jako

$$L \in [\mathbb{R}^+ \cap J_N] \setminus \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} J_n.$$

Toto můžeme interpretovat tak, že ve zkoumaném systému intervalů J_n s krajními body l_n a p_n zjišťujeme, kdy J_N obsahuje kladnou hodnotu L , kterou zároveň neobsahuje žádný z intervalů J_n pro $n \neq N$.

Budeme nyní tvrdit, že umíme nalézt vyhovující L právě tehdy, když $p_{N+1} < l_{N-1}$. Za tímto účelem učiníme několik pozorování.

1. Posloupnost p_n je tvořena kladnými čísly a monotónně klesá k nule.
2. Posloupnost l_n taktéž konverguje k nule, navíc zřejmě od nějakého n_0 vždy budou její členy záporné.
3. Je-li ω_0 takové, že $l_{N-1} \leq 0$, pak nutně z monotonie p_n bude platit

$$\mathbb{R}^+ \cap (l_{N-1}, p_{N-1}) \supseteq \mathbb{R}^+ \cap (l_N, p_N),$$

tedy nelze splnit podmínku ze zadání. Proto nás budou zajímat takové frekvence ω_0 , při kterých platí $l_{N-1} > 0$.

4. Podívejme se, kdy je posloupnost l_n monotónní. Po spojitím rozšíření definičního oboru¹ můžeme psát

$$0 > \frac{dl_n}{dn} = \frac{1}{n^2 \omega_0} \left(A - \frac{2}{n \omega_0} \right) \iff n < \frac{2}{\omega_0 C A},$$

což je speciálně splněno, platí-li $l_{n+1} > 0$. Z toho důvodu je posloupnost l_n klesající, dokud jsou její hodnoty kladné.

5. Pokud tedy platí $p_{N+1} < l_{N-1}$, má interval (p_{N+1}, l_{N-1}) neprázdný průnik s intervalem J_N . V tomto průniku můžeme zvolit L , to bude tedy prvkem intervalu J_N , ale protože $L > p_{N+1} > p_{N+2} > \dots$, nebude prvkem intervalů J_{N+1} , J_{N+2} ani následujících. Stejně tak $0 < L < l_{N-1} < l_{N-2} < \dots < l_1$, tedy není ani prvkem intervalů J_1 až J_{N-1} .
6. Pokud naopak platí $p_{N+1} \geq l_{N-1}$, máme též $l_{N+1} < l_N < l_{N-1} \leq p_{N+1} < p_N < p_{N-1}$, tedy

$$J_N \subseteq J_{N-1} \cap J_{N+1},$$

tedy podmínku ze zadání nelze splnit.

¹abychom mohli derivovat

Díky všemu výše uvedenému tedy víme, že musí platit $p_{N+1} < l_{N-1}$, pišme tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N+1)^2\omega_0^2C} + \frac{A}{(N+1)\omega_0} &< \frac{1}{(N-1)^2\omega_0^2C} - \frac{A}{(N-1)\omega_0}, \\ \omega_0 A \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1} \right) &< \frac{1}{C} \left(\frac{1}{(N-1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right), \\ \omega_0 &< \frac{2}{AC} \frac{1}{N^2-1}, \end{aligned}$$

což je požadovaná podmínka.

Nakolik je uvedeně řešení spíše matematické, uvedeme ještě trochu fyzikální intuice. RLC obvod má svou rezonanční frekvenci a čím více se frekvence zdroje liší od této rezonanční frekvence, tím více bude utlumená. Proto stačí kontrolovat pouze utlumení dvou sousedních frekvencí – protože pokud dostatečně utlumíme je, budou napětí s frekvencemi ještě vzdálenějšími od rezonanční frekvence obvodu utlumené ještě více (toto je přesně ona monotónnost, kterou jsme několikrát zmiňovali výše). Hodnota L tedy bude volená tak, aby rezonanční frekvence $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ byla blízko $N\omega_0$. Fyzikálnější přístup, kdy předpokládáme známý tvar rezonanční křivky, by pak mohl vypadat například takto: Útlum RLC obvodu podle dané frekvence vyjadřuje rezonanční křivka, která má jedno maximum v rezonanční frekvenci, jejíž šířka je určena parametry obvodu. Šířku křivky v bodě 90% útlumu můžeme vyjádřit z rovnice (3). S využitím substituce $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ dostáváme pro krajní body s uvážením pouze kladných frekvencí

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}, \\ \omega_2 &= \frac{AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}. \end{aligned}$$

Vzdálenost mezi nimi $\Delta\omega = A/L$ pak musí být menší než $2\omega_0$, aby v intervalu s útlumem menším než 90% byla pouze frekvence $N\omega_0$ a ne frekvence jiných zdrojů. Z toho usuzujeme, že hledáme hranici pro ω_0 , kdy sousední frekvence $(N-1)\omega_0$ a $(N+1)\omega_0$ jsou právě mezní frekvence ω_1 a ω_2 . Cílová frekvence $N\omega_0$ bude tedy v tomto případě přesně uprostřed intervalu, tedy průměrem ω_1 a ω_2

$$N\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\sqrt{A^2 + C^2 + 4LC}}{2LC} = \sqrt{\frac{A^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}.$$

Z tohoto vztahu nyní vyjádříme vhodnou indukčnost (volíme kladný výsledek)

$$\begin{aligned} 0 &= 4L^2CN^2\omega_0^2 - 4L - A^2C, \\ L &= \frac{1 + \sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2}}{2N^2\omega_0^2C}. \end{aligned}$$

Dosažením indukčnosti do podmínky $\Delta\omega < 2\omega_0$ dostáváme

$$2\omega_0 > \frac{A}{L} = \frac{2N^2\omega_0^2 CA}{1 + \sqrt{1 + A^2 C^2 N^2 \omega_0^2}},$$

$$\sqrt{1 + A^2 C^2 N^2 \omega_0^2} > N^2 \omega_0 CA - 1,$$

$$1 + A^2 C^2 N^2 \omega_0^2 > N^4 \omega_0^2 C^2 A^2 - 2N^2 \omega_0 CA + 1,$$

$$AC(1 - N^2)\omega_0 > -2,$$

$$\omega_0 < \frac{2}{AC} \frac{1}{N^2 - 1}.$$

Dostáváme tedy stejný výsledek jako předchozím postupem.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.