Úloha V.E ... mazlavá

12 bodů; průměr 8,63; řešilo 38 studentů

Změřte závislost dynamické viskozity η kuchyňského oleje na teplotě T. Naměřená data proložte funkcí

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{T_0}{T}\right)$$

a vyčíslete hodnoty parametrů η_0 a T_0.

Nápověda: Při fitování vašich výsledků vyneste vodorovnou osu jako $1/T$. Pak je možné proložení dat požadovanou křivkou i v méně pokročilém programu, např. v Excelu.

Petr se připravoval na praktika.

Teorie

Viskozitu kapaliny můžeme změřit pomocí Stokesovy metody měření viskozity. Ta vychází z faktu, že při laminárním (tzn. nevírovém) proudění je odporová síla prostředí působící na těleso tvaru koule, které se pohybuje v tomto prostředí, rovna

$$F_{\mathrm{odp}} = 6\pi r \eta v \,,$$

kde η je dynamická viskozita, v je rychlost pohybu tělesa a r je jeho poloměr. Podmínka pro laminární proudění není ostrá, je splněna pro nízké hodnoty Reynoldsova čísla (Re). Obecně můžeme uvažovat laminární proudění, pokud platí $Re < 2\,000$. V některé literatuře je dokonce uvedena za vhodných podmínek (jako je vhodný tvar trubice, ve které proudění probíhá) kritická hodnota Reynoldsova čísla $Re_K = 20\,000$. Reynoldsovo číslo můžeme spočítat jako

$$Re = \frac{2r\rho v}{\eta} = \frac{d\rho v}{\eta} \,,$$

kde η, r, v jsou jako výše a ρ je hustota kapaliny, ve které se těleso pohybuje. Kromě odporu prostředí na kuličku působí tíhová síla a vztlaková síla, pro které postupně platí vztahy

$$F_{\mathrm{tíh}} = mg \,,$$

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \,,$$

kde V je objem tělesa (za něj můžeme dosadit ze vztahu pro objem koule $4\pi r^3/3$), m je jeho hmotnost a g je tíhové zrychlení. Budeme volit $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Protože odporová síla prostředí je úměrná rychlosti, těleso při volném pádu zrychluje do té doby, než se tíhová síla vyrovná se vztlakovou silou a odporovou silou, poté je pohyb rovnoměrný. Platí pak

$$F_{\mathrm{tíh}} - F_{\mathrm{vz}} - F_{\mathrm{odp}} = 0 \,,$$

$$mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi r \eta v = 0 \,. \tag{1}$$

Když vyjádříme hmotnost tělesa pomocí hustoty podle vzorce

$$\rho_t = \frac{m}{V} \,,$$

můžeme z rovnice (1) vyjádřit viskozitu kapaliny η jako

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_t - \rho)}{9v} = \frac{d^2 g t(\rho_t - \rho)}{18l} \,,$$

kde jsme nahradili rychlost podílem dráhy l a času t a poloměr r polovinou průměru $d/2$.

U newtonských kapalin závisí viskozita na teplotě empirickým vztahem

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{\frac{T_0}{T}} \,,$$

kde η_0, T_0 jsou parametry, které musíme změřit. Můžeme to udělat tak, že změříme viskozitu kapaliny při různých teplotách a do našich dat pak tuto závislost nafitujeme.

Hustotu tělesa budeme měřit pyknometrickou metodou. Postupujeme tak, že změříme postupně hmotnost pyknometru m_1, hmotnost pyknometru s tělesem m_2, hmotnost pyknometru s tělesem a kapalinou známé hustoty m_3 a hmotnost m_4 pyknometru naplněného kapalinou známé hustoty ρ. Získáváme soustavu rovnic pro neznámé V a ρ_t, jejímž řešením pro hustotu je

$$\rho_t = \rho \frac{m_2 - m_1}{m_4 - m_3 + m_2 - m_1} \,.$$

Uspořádání a provádění experimentu

Do odměrného válce naplněného olejem budeme pouštět drobné kuličky a měřit čas, za který urazí dráhu, jakou si zvolíme. V našem případě jsme její délku změřili jako $l = 11{,}6\,\mathrm{cm}$, chybu odhadneme jako polovinu nejmenšího dílku měřidla, tedy $\sigma_l = 0{,}05\,\mathrm{cm}$. Do odměrného válce budeme pouštět dva různé druhy kuliček – modré a bílé. Jejich průměry změříme na dílenském mikroskopu ve dvou kolmých osách, hustotu určíme pyknometrickou metodou popsanou v teoretické části. Protože kuličky budou mít mírně eliptický tvar, určíme jejich efektivní průměr jako geometrický průměr naměřených průměrů $d = \sqrt{d_x d_y}$ (tedy jaký průměr by musela kulička mít, aby měl její průřez stejnou plochu jako v případě, kdy by byla dokonale kulatá). Relativní chybu pyknometrického určení hustoty můžeme odhadnout jako $\eta = 1\%$. Chyba dílenského mikroskopu je $\sigma_d = 0{,}01\,\mathrm{mm}$, ze vzorce pro přenos chyb vyplývá, že se to do geometrického průměru promítne jako $\sigma_{\overline{d}} = 0{,}007\,\mathrm{mm}$. Naměřené hodnoty uvádíme v tabulce 1.

Tab. 1: Průměry a hustoty použitých kuliček

kulička	průměr kuličky v x-ové ose	průměr kuličky v y-ové ose	geometrický průměr kuličky	chyba geometrického průměru	hustota kuličky	chyba hustoty
	$\frac{d_x}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d_y}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\overline{d}}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\sigma_{\overline{d}}}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\rho}{\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}$	$\frac{\sigma_\rho}{\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}$
modrá kulička	2,14	2,11	2,125	0,007	2593	26
bílá kulička	1,66	1,64	1,650	0,007	2345	23

Dále budeme pro naše měření potřebovat dohledat hustotu slunečnicového oleje při teplotách, při kterých budeme měření provádět. Tyto hustoty uvádíme v tabulce 2, chybu hustot odhadneme jako $\eta_\rho = 1\%$.

Nyní můžeme přistoupit k měření času pádu kuliček v oleji. Olej zahřejeme na příslušnou teplotu, pustíme do něj tři kuličky od každé barvy a měříme čas potřebný k tomu, aby urazily

Tab. 2: Hustoty oleje při různých teplotách

	hustota při 25 °C	hustota při 50 °C	hustota při 65 °C	hustota při 85 °C	hustota při 100 °C
	$\frac{\rho_1}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$	$\frac{\rho_2}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$	$\frac{\rho_3}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$	$\frac{\rho_4}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$	$\frac{\rho_5}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$
hustota	920	900	890	880	870
chyba	9	9	9	9	9

námi vytyčenou dráhu. Čas jsme měřili stopkami na mobilu. Jejich přesnost je výrazně větší než naše reakční doba, která tak bude tvořit většinu nejistoty měření. Tu odhadneme jako $\sigma_t = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Naměřené časy uvádíme v následujících tabulkách.

Tab. 3: Naměřené časy a rychlosti kuliček

teplota	modrá kulička		bílá kulička	
$\frac{T}{°\mathrm{C}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{v}{\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{v}{\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}}$
24,6	1,72	6,74	2,63	4,41
24,6	1,78	6,52	3,29	3,53
24,6	1,92	6,04	3,35	3,46
52,3	1,21	9,59	1,72	6,74
52,3	1,27	9,13	1,84	6,30
52,3	1,19	9,75	1,85	6,27
65,5	0,87	13,33	1,45	8,00
65,5	1,06	10,94	1,38	8,41
65,5	0,93	12,47	1,20	9,67
85,1	0,68	17,06	1,33	8,72
85,1	0,81	14,32	1,12	10,36
85,1	0,74	15,68	1,32	8,79
105,7	0,66	17,58	1,06	10,94
105,7	0,73	15,89	0,86	13,49
105,7	0,67	17,31	0,93	12,47

Nyní naše data vyneseme do grafu a proložíme požadovanou závislostí. Protože ve vztahu nevystupuje teplota ve stupních Celsia, ale v Kelvinech, teplotu vynášíme upravenou o převodní vztah $0\,°\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$.

Z toho již získáváme požadovaný vztah, který číselně vychází

$$\eta = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot e^{\frac{1\,597}{T}} .$$

Samotné parametry závislosti včetně nejistot (určených metodou přenosu chyb) pak jsou $\eta_0 = (2{,}7 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$ a $T_0 = (1\,600 \pm 100)\ \mathrm{K}$.

Diskuze výsledků

Z grafu můžeme vidět, že závislost viskozity na teplotě je opravdu exponenciálně klesající. Přesto však jak z grafu, tak i z výsledných nejistot parametrů můžeme vidět, že naše měření nebylo nejpřesnější. Důvodů tu bude hned několik. Prvním z nich je, do jaké míry byla splněna podmínka pro laminární proudění. Obecně se sice přijímá podmínka $Re < 2\,000$, nicméně pro přesná měření se často výrazně zpřísňuje na $Re \ll 1$. Vztah pro odpor koule při laminárním proudění $F = 6\pi r\eta v$ je odvozen linearizací skutečného odporu při nízkých hodnotách Reynoldsova čísla a čím bude toto číslo menší, tím lépe bude vztah platit. Už při první měřené teplotě mělo proudění při pouštění modré kuličky Reynoldsovo číslo $Re = 2{,}12$ a při bílé $Re = 0{,}96$, během zvyšování teploty pak jeho hodnota jenom rostla.

Dalším důvodem je krátká dráha, na které jsme rychlost kuliček měřili. Protože ji kuličky byly schopny překonat za velmi krátký čas (srovnatelný s naší reakční dobou) relativní chyba měření byla velmi vysoká. To by se dalo napravit měřením po značně delší dráze.

Pohyb jsme považovali za rovnoměrně přímočarý. Odpor oleje však závisí na rychlosti pohybu kuličky, ve skutečnosti tedy kulička asymptoticky zrychluje k určité kritické hodnotě. Proto jsme dráhu kuličky neměřili hned od hladiny oleje, ale nechali jsme několik centimetrů „rozjezdové dráhy“, po jejímž překonání jsme mohli pohyb kuličky v dobrém přiblížení považovat za rovnoměrně přímočarý.

Všechny oleje stejného druhu nemají nutně stejné fyzikální vlastnosti, ale značně se liší například podle konkrétního druhu zpracování. Z toho zároveň vyplývá, že námi nalezené hustoty při různých teplotách nebudou přesně vystihovat náš konkrétní olej. Navíc se nám olej nikdy nepovedlo zahřát přesně na teplotu příslušnou dané hustotě.

Zanedbávali jsme vliv konečného rozměru odměrného válce. Naše teorie odpovídá situaci, ve které nebyla kapalina uzavřena v nádobě konečných rozměrů. Kdybychom chtěli být důslední (což vzhledem k přesnosti našeho měření nemělo příliš smysl), mohli bychom do vztahu pro výpočet viskozity přidat korekční člen (viz experimentální úloha v 6. sérii 33. ročníku).

Závěr

Změřili jsme teplotní závislost dynamické viskozity slunečnicového oleje. V souladu s teorií byla závislost exponenciálně klesající dle vztahu $\eta = \eta_0 \cdot e^{(T_0/T)}$.

Parametry teplotní závislosti jsme určili jako $\eta_0 = (2{,}7 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$, $T_0 = (1597 \pm 108)\,\mathrm{K}$. V parametrech máme velmi velké nejistoty, naše měření bylo tudíž značně nepřesné, zvláště kvůli velké relativní chybě měření času a nepřesnosti ve stanovení hustoty oleje. Pro lepší přesnost bychom k měření mohli použít viskozimetr k takovému typu měření určený.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.