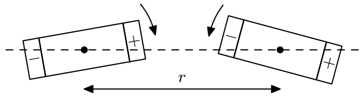
Úloha VI.5 ... kmitající magnety

10 bodů; průměr 5,55; řešilo 22 studentů

Mějme dva identické dipólové magnety, které upevníme tak, že se mohou bez tření otáčet ve stejné rovině. Jejich osy otáčení jsou tedy rovnoběžné a magnety leží v jedné rovině. Když magnety mírně vychýlíme z rovnovážné polohy, začnou kmitat. Najděte vlastní módy těchto kmitů a spočítejte jejich frekvence. Diskutujte, jak bude vypadat pohyb magnetů pro obecnou počáteční výchylku (tento případ už tedy nemusíte počítat). Magnety mají magnetický moment m, moment setrvačnosti kolem osy otáčení J a vzájemná vzdálenost jejich středů je r.

Jirka ukradl úlohu z Výfuku.



Naším úkolem je vyšetřit kmitavý pohyb dvou magnetů. Po vychýlení z rovnovážné polohy na magnety působí moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, tento moment je navíc pro každý z magnetů závislý na jejich výchylkách z rovnovážné polohy (jak uvidíme dále). Jedná se tedy o tzv. *vázané kmity*, jejichž studium typicky vede na soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Tyto rovnice se dají elegantně řešit pomocí maticového zápisu, vlastní módy odpovídají vlastním vektorům matice soustavy a frekvence se dají vypočítat z vlastních čísel. O této metodě řešení pojednává například Seriál 34. ročníku *o kmitání a vlnění*.[1] Ke skutečnému porozumění, proč tato metoda výpočtu funguje jsou však zapotřebí pokročilé znalosti lineární algebry, proto zde zvolíme jiný postup.

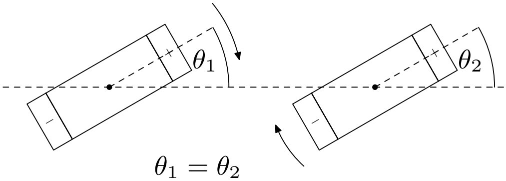
Před tím, než se pustíme do sestavení pohybových rovnic, se pokusíme co nejvíce výsledků uhádnout pomocí fyzikální intuice. Správnost těchto odhadů nakonec samozřejmě ověříme přesným matematickým výpočtem.

Mějme magnety v rovnovážné poloze, tedy v poloze, kdy leží na jedné ose orientované tak, že jsou opačné póly magnetů u sebe. Když magnety trochu vychýlíme, tak vznikne moment síly, který je bude vracet do rovnovážné polohy, v důsledku čehož začnou kmitat obecně komplikovaným způsobem. Chceme najít vlastní módy, tedy takové kmity, kdy celá soustava kmitá synchronně se stejnou frekvencí. Magnety jsou identické, proto můžeme očekávat, že při takovém pohybu budou oba kmitat se stejnou amplitudou. O fázi kmitů toho na první pohled moc neřekneme, proto se nejprve podíváme na speciální případy, kdy je fáze buď stejná, nebo opačná. V těchto případech je jejich absolutní výchylka (t. j. absolutní hodnota z výchylky) stejná a momenty sil, kterými na sebe magnety působí, mají tím pádem stejnou velikost a i zrychlení je potom stejné. Situace je tedy dokonale symetrická a pohyb magnetů musí být stejný. Našli jsme tedy dva vlastní módy!

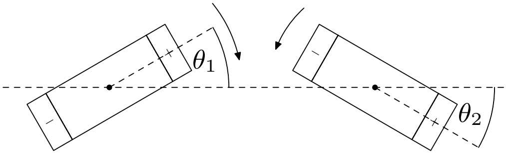
Jsou to všechny módy, nebo existují ještě nějaké další? Každý z magnetů se může pouze otáčet v jedné rovině, máme tedy jeden stupeň volnosti na každý magnet. Dá se ukázat (opět je to jednoduchý výsledek z lineární algebry), že počet módů je stejný jako počet stupňů volnosti, takže naše magnety mají skutečně pouze dva módy a jsou to ty, které jsme nalezli před chvílí. Nalezené vlastní módy magnetů jsou znázorněny na obrázcích 1 a 2.

Za pomoci jednoduchých fyzikálních úvah jsme tedy nalezli kandidáty na vlastní módy, pojďme je nyní ověřit přesným matematickým výpočtem. Dalším výstupem těchto výpočtů bude i nalezení příslušných vlastních frekvencí.

[1] `https://fykos.cz/rocnik34/serial/start`



Obr. 1: První vlastní mód – magnety kmitají synchronně tak, že výchylky z rovnovážných poloh magnetů jsou po celou dobu pohybu stejné.



Obr. 2: První vlastní mód – magnety kmitají synchronně tak, že výchylky z rovnovážných poloh magnetů jsou po celou dobu pohybu opačné.

Ze zadání víme, že magnety jsou dipólové, například na Wikipedii[2] najdeme, že pro magnetickou indukci, vyvolanou magnetickým dipólem umístěným v $\mathbf{r} = 0$, platí v bodě s polohou $\mathbf{r}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\mathbf{m}\cdot r)}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right) ,$$

kde $r = |\mathbf{r}|$ je vzdálenost bodu od magnetu. V naší úloze jsou magnety v konstantní vzdálenosti r a jediné, co se mění, je jejich orientace. Označme θ_1, θ_2 výchylky magnetů z rovnovážné polohy stejně, jako na obrázcích 1 a 2 a jako osu x položme přímku, na které leží středy magnetů. V těchto souřadnicích mají magnetické momenty magnetů složky $\mathbf{m}_{1,2} = m\left(\cos\theta_{1,2}, \sin\theta_{1,2}\right)$, polohový vektor druhého magnetu vzhledem k prvnímu je $\mathbf{r}_1 = (r, 0)$ a v opačném případě máme $\mathbf{r}_2 = (-r, 0)$. Pokud tedy první magnet vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel θ_1, tak druhý magnet „cítí“ magnetickou indukci

$$B_{x1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3mr^2\cos\theta_1}{r^5} - \frac{m\cos\theta_1}{r^3}\right) = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}\cos\theta_1 ,$$
$$B_{y1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3mr\cos\theta_1}{r^5}\cdot 0 - \frac{m\sin\theta_1}{r^3}\right) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sin\theta_1 .$$

Podobně při vychýlení druhého magnetu o θ_2 je v místě prvního magnetu indukce

$$B_{x2} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}\cos\theta_2 ,$$
$$B_{y2} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sin\theta_2 .$$

[2] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Magnetický_dipól`

Na magnet ve vnějším magnetickém poli obecně působí moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Konkrétně v naší úloze pro moment síly působící na druhý magnet máme

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_2 \times (\mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{y1}) \,,$$

odkud

$$M_2 = -mB_{x1} \sin\theta_2 + mB_{y1} \cos\theta_2 = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cdot \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2\right) \,,$$

a pro moment síly na první magnet dostaneme

$$M_1 = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cdot \cos\theta_2 \sin\theta_1 + \sin\theta_2 \cos\theta_1\right) \,.$$

Když na těleso s momentem setrvačnosti J působí moment síly M, tak pro úhlové zrychlení platí $M = J\ddot{\theta}$. Odtud sestavíme pohybové rovnice pro oba magnety, přičemž nás zajímají malé kmity. Proto použijeme přibližné vztahy $\sin x \approx x$ a $\cos x \approx 1$. Tak dostaneme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3 J} \cdot (2\theta_1 + \theta_2) \,, \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3 J} \cdot (\theta_1 + 2\theta_2) \,. \end{aligned}$$

Tuto soustavu bychom nyní chtěli vyřešit. Existuje mnoho způsobů, například pomocí dříve zmíněného maticového zápisu, nebo bychom mohli jednu z rovnic dvakrát zderivovat a použít dosazovací metodu, čímž bychom dostali jednu rovnici čtvrtého řádu, atd. My použijeme trik, který, jak uvidíme později, úzce souvisí s fyzikální intuicí, kterou jsme získali na začátku. Všimněme si, že když rovnice sečteme

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3 J} \cdot (3\theta_1 + 3\theta_2) \,,$$

a přejdeme k nové proměnné $\xi = \theta_1 + \theta_2$, tak díky vlastnostem derivací dostaneme

$$\ddot{\xi} = -\frac{3\mu_0 m}{4\pi r^3 J} \xi \,,$$

což je běžná rovnice pro harmonický oscilátor. Řešení této rovnice známe, jsou to harmonické kmity s frekvencí

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\mu_0 m}{4\pi r^3 J}} = \sqrt{3}\omega_0 \,.$$

Podobně, pokud původní rovnice odečteme a přejdeme k proměnné $\eta = \theta_1 - \theta_2$, dostaneme

$$\ddot{\eta} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3 J} \eta \,,$$

tedy kmity s frekvencí

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3 J}} = \omega_0 \,.$$

Máme tedy, že $\xi = \theta_1 + \theta_2$ kmitá s frekvencí $\sqrt{3}\omega_0$ a $\eta = \theta_1 - \theta_2$ kmitá s ω_0. Jak si to ovšem představit?

Jedna možnost je vyjít přímo z rovnic. Obecné řešení rovnice pro harmonický oscilátor je dáno součtem funkcí sin a cos, které kmitají s příslušnou frekvencí

$$\xi = \theta_1 + \theta_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t \,,$$
$$\eta = \theta_1 - \theta_2 = B_1 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t \,,$$

kde konstanty A_1, A_2, B_1, B_2 jsou dány počátečními podmínkami. Sečtením a odečtením těchto rovnic získáme samostatné řešení pro úhly θ_1 a θ_2.

$$\theta_1 = \left(A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t\right)/2$$
$$\theta_2 = \left(A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t - B_1 \sin \omega_2 t - B_2 \cos \omega_2 t\right)/2$$

Zastavme nyní psaní matematických vzorců a jen se rozhlédněme po výsledcích. Vidíme, že pohyb magnetů je dán součtem kmitavých pohybů s frekvencemi ω_1 a ω_2. Tím nás napadne otázka: mohlo by se stát, že magnety budou kmitat například pouze s frekvencí ω_1? Z rovnic vidíme, že matematicky to odpovídá situaci, kdy je $B_1 = B_2 = 0$. Může tato situace ovšem vůbec nastat?

Zde lze argumentovat více způsoby. Jedním z nich je, že počáteční podmínky odpovídají čtyřem nezávislým požadavkům na konstanty A_1, A_2, B_1 a B_2 (jsou skutečně čtyři: počáteční výchylky obou magnetů a jejich počáteční rychlosti). Tyto podmínky nám dají soustavu čtyř lineárních rovnic. Pokud nás nyní zajímá, jestli může nastat situace $B_1 = B_2 = 0$, stačí tuto podmínku dosadit do rovnic a ověřit, jestli existují počáteční podmínky, které by rovnice řešily. Pokud dosadíme $B_1 = B_2 = 0$ do rovnice pro $\eta = \theta_1 - \theta_2$ vidíme, že rovnice je splněna tehdy, když je $\theta_1 = \theta_2$ v průběhu celého pohybu. To ovšem můžeme zajistit, pokud nastavíme $\theta_1(t = 0) = \theta_2(t = 0) \neq 0$ a $\dot{\theta}_1(t = 0) = \dot{\theta}_2(t = 0) = 0$.

Podobně nalezneme, že pohyb bude obsahovat pouze frekvenci ω_2, pokud nastavíme $\theta_1(t = 0) = -\theta_2(t = 0) \neq 0$ a nulové počáteční úhlové rychlosti. Máme tedy, že magnety kmitají synchronně s frekvencí $\omega_2 = \omega_0$, pokud je $\theta_1 = -\theta_2$ a naopak pohyb s frekvencí $\omega_1 = \sqrt{3}\omega_0$ nastává tehdy, když je $\theta_1 = \theta_2$. To ale přesně odpovídá vlastním módům, které jsme našli před chvílí!

Vidíme, že fyzikální úvahy mohou často zjednodušit řešení náročných rovnic. Místo toho, abychom rovnice řešili zdlouhavými matematickými postupy, pouze pomocí fyzikální intuice řešení jednoduše uhádneme, a pak jen ověříme, jestli byl náš odhad správný. Můžete si sami vyzkoušet, že když do našich diferenciálních rovnic dosadíte $\theta_1 = \theta_2$ a $\theta_1 = -\theta_2$, jsou řešením rovnic skutečně harmonické kmity s příslušnými frekvencemi. Při tomto postupu si pouze musíme dát pozor na to, že potřebujeme nalézt všechny nezávislé mody. My jsme již argumentovali, že naše úloha má tzv. dva stupně volnosti a rovnice, které nám vyšly, potvrzují (v tomto speciálním případě), že dvě stupňům volnosti skutečně odpovídají pouze dva mody.

Jak bude vypadat obecné řešení? Z explicitních rovnic pro θ_1 a θ_2 vidíme, že obsahují obě frekvence, tedy obecný pohyb bude tvořen součtem obou módů. Jak moc budou jednotlivé módy zastoupeny, přitom závisí pouze na počátečních podmínkách.

To, že máme obecné řešení dáno součtem módů, je opět obecný výsledek a souvisí s tím, že jsou naše diferenciální rovnice lineární. Jinými slovy, pokud nějaké dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ řeší lineární diferenciální rovnici, pak ji řeší i funkce $h(x) = af(x) + bg(x)$, kde a, b jsou libovolné konstanty (důkaz tohoto tvrzení ponecháváme čtenáři jako jednoduché domácí cvičení).

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.